Engineering
JAN 23 1926

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 5 :: :: Heft 6 ::

Dezember 1925 Seite 449 bis 528

Mit den Vorträgen der Danziger Tagung vom 14. u. 15. Septbr. 1925

I N H A L T:

HAUPTAUFSÄTZE:

STEUERMANN, Zur Theorie der polarsymmetrischen Deformation der elastischen, anisotropen Schalen / WEBER, Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern / FUNK, Über die Stabilität der beiderseits eingespannten Elastika und ähnliche Fragen / Vorträge der Danziger Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik / POLLACZEK-GEIRINGER, Rückschluß auf die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse / BURMESTER, Analysis der möglichen Beschleunigungszustände eines komplan bewegten starren ebenen Systems

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN

V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN SW 19

Anzeigenpreise und Bezugsbedingungen auf der 3. Umschlagseite.

RIEFLER

Präzisions-Reißzeuge
Original-Rundsystem
Präzisions-Uhren
Nickelstahl-Pendel

Clemens Riefler, Nesselwang und München
Fabrik mathematischer Instrumente

Schacht & Westerich

Hamburg 1
Technischer Zeichenbedarf und Papiere

Rechenschieber aller Systeme, auch solche für besondere Berufe · Präzisions-Neusilber-Reißzeuge · Präzisions-Feinmeß- und Flächenberechnungs-Instrumente

Neu! **Kreisrechenschieber Nr. 8406**

D. R. P.
Präzisions-Skalen in vernickeltem Messinggehäuse.
Skalen für Quadrate, Kuben, log, sin, tang.
Bequem für die Tasche

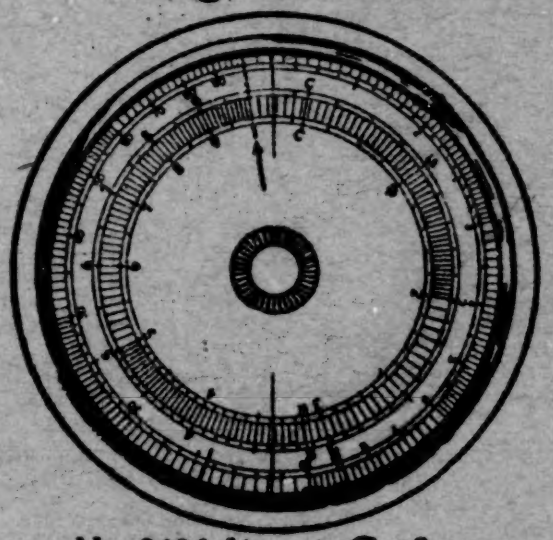
*

Paustinktur „Klementine"

D. R. P.
Jedes Papier wird durch einfaches Einreiben durchsichtig.
Unentbehrlich zur Anfertigung von Lichtpausen
von jeder beliebigen Zeichnung

*

Man verlange kostenlos Werbeschrift und Angebot



Nr. 8406 $^3/_5$ nat. Größe

Ott

—Pantographen
—Planimeter
——Flügel
——Pegel
sind Qualitätsmarken

A. OTT, KEMPTEN (BAYERN)

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 5 **Dezember 1925** **Heft 6**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. E. Steuermann: Zur Theorie der polarsymmetrischen Deformation der elastischen, anisotropen Schalen	449
C. Weber: Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern	466
P. Funk: Ueber die Stabilität der beiderseits eingespannten Elastika und ähnliche Fragen	468
Vorträge der Danziger Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik von E. Trefftz, H. Reißner, F. Schleicher, F. Wolf, W. Spannhake, H. Krey, F. Eisner, H. Lorenz, H. Föttinger	473
H. Pollaczek-Geiringer: Rückschluß auf die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse	493
L. Burmester: Analysis der möglichen Beschleunigungszustände eines komplan bewegten starren ebenen Systems	502
Kleine Mitteilungen. Gauster: Bemerkungen zum ebenen Spannungszustand. — Poukka: Eine neue Näherungsformel für die Schwingungsdauer des Pendels. — Volk: Axonometrie in graphischer Darstellung	519
Buchbesprechungen. Riemann-Weber: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. — Fischer: Eine Darstellung des Nernstschen Wärmetheorems. — Haas: Einführung in die theoretische Physik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. — Kistner: Der Feinaufbau der Materie. — Auerbach: Physik in graphischen Darstellungen. — Levi-Civita: Fragen der klassischen und relativistischen Mechanik. — v. Sanden: Praktische Analysis. — v. Kármán: Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen	523
Nachrichten	526

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Theorie der polarsymmetrischen Deformation der elastischen, anisotropen Schalen.

Von **E. STEUERMANN** in Kiew.

Die Theorie der isotropen Schalen, die die Form eines Umdrehungskörpers haben und unter dem Einflusse einer polarsymmetrischen Belastung stehen, wurde durch die Arbeiten von H. Reißner, E. Meißner und seiner Schüler, von O. Blumenthal[1]) u. a. weit entwickelt, hingegen wurden unseres Wissens die anisotropen Schalen bis jetzt noch kaum untersucht. Anisotrope Materialien werden in der Praxis öfters angewendet; auch werden Schalen in einer solchen Weise und Baustoffzusammenstellung hergestellt, daß man sie nicht mehr als isotrop berechnen darf. Das gilt z. B. für Eisenbetonschalen, deren Armierung gewöhnlich in zwei zu einander senkrechten Richtungen ungleich ist, dann für Wellblechkonstruktionen usw. Aehnliche Eigentümlichkeiten kommen bei Schalen vor, die mit einem dichten Netz von Rippen versehen sind[2]). Bei der Berechnung aller dieser Schalen können zwei Fälle auftreten: Entweder sind auf sie die Formeln für anisotrope Schalen wenigstens näherungsweise noch anwendbar, oder sie müssen unter in bezug auf ihren Bau noch allgemeineren Annahmen berechnet werden.

In dieser Arbeit zeigen wir die Erweiterung des Problems der elastischen, isotropen Schalen, die die Form eines Umdrehungskörpers haben und unter dem Einflusse einer symmetrischen Belastung stehen, auf den Fall der anisotropen Schalen.

---

[1]) Siehe: H. Reißner, Festschrift Müller-Breslau, 1912. — E. Meißner, Physik. Zeitschrift Bd. XIV, 1913, S. 343. Vierteljahrschrift d. Naturforsch. Gesellschaft in Zürich 1915. — O. Blumenthal, Zeitschr. f. Math. und Phys., Bd. 62, 1914. — S. Timoschenko, Höhere Elastizitätslehre, Bd. II, Petersburg 1916 (russisch). — Allgemeine Uebersicht und Literaturangaben: L. Föppl, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. I, H. 6, 1921. — A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. II.

[2]) In der jüngsten Zeit ist über die Theorie der kreuzweise armierten Eisenbetonplatten und ähnliche Fragen die interessante Arbeit v. H. Huber in Bauingenieur 1923 erschienen.

H. Reißner hat die Aufgabe der Berechnung einer sphärischen Schale auf die Integration eines Systems von zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, von streng symmetrischer Form zurückgeführt; E. Meißner[1]) brachte die Lösung der allgemeinen Aufgabe der Berechnung symmetrischer Schalen in Zusammenhang mit der Integration einer Gleichung vierter Ordnung und zeigte die Fälle, in welchen diese Differentialgleichung in zwei Gleichungen zweiter Ordnung zerfällt.

Von besonderer Bedeutung sind die folgenden von Meißner untersuchten Schalenarten:

a) Schalen von konstanter Wandstärke und konstantem Krümmungshalbmesser des Meridianschnittes (Sphäre, Kegel, Torus): für die Sphäre läßt sich die Gleichung zweiter Ordnung mittelst hypergeometrischer, für den Kegel mittelst zylindrischer Funktionen integrieren.

b) Kegel mit nach einem linearen Gesetz veränderlicher Wandstärke: die entsprechende Differentialgleichung zweiter Ordnung läßt sich mittelst hypergeometrischer Funktionen integrieren.

Wir werden beweisen, daß solche Lösungen auch für den Fall der symmetrischen, anisotropen Schalen bestehen, wobei für einige Fälle der konischen Schalen das Integral noch einfacher durch algebraische und trigonometrische Funktionen dargestellt werden kann. Wir werden weiter zwei Arten von Schalen behandeln, die in der Praxis von Bedeutung sind, und deren Differentialgleichungen, obwohl die Krümmungshalbmesser veränderliche Größen sind, sich doch mittelst hypergeometrischer Funktionen integrieren lassen.

Ferner werden wir die Bedingungen erörtern, unter welchen die Berechnung einer Schale von konstanter Stärke, die die Form eines Umdrehungskörpers hat und symmetrisch belastet ist, immer auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung führt.

Die der zylindrischen Schale entsprechende Differentialgleichung vierter Ordnung untersuchte schon Kirchhoff[2]), der zu dieser Gleichung bei der Untersuchung der Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt geführt wurde. Hierbei wies er auf einige Fälle hin, wo diese Gleichung in zwei Gleichungen zweiter Ordnung zerfällt.

In Anwendung auf die Zylinderschalen können die von Kirchhoff gefundenen Ergebnisse folgenderweise ausgedrückt werden: verändert sich die Wandstärke einer isotropen Schale nach einer linearen Funktion, so läßt sich die Differentialgleichung für deren Gleichgewicht mittels zylindrischer Funktionen integrieren[3]). Unsere Untersuchungen werden noch zu dem weiteren Ergebnis führen, daß sich eine zylindrische Schale, deren Stärke sich parabolisch ändert, mittels hypergeometrischer Funktionen berechnen läßt. Unsere mathematische Behandlung der Aufgabe ist von derjenigen von Kirchhoff und Meißner verschieden und dies führt unter anderem zu einigen Vereinfachungen in der Integration der Differentialgleichungen des Gleichgewichtes einer Schale.

Zum Schlusse untersuchen wir die Schale noch bei in bezug auf ihren Bau ganz allgemeinen Annahmen und geben die in diesem Falle anwendbaren Methoden der Integration der Differentialgleichungen ihres Gleichgewichtszustandes an.

1. Die Differentialgleichungen. Die bekannten Gleichungen des Gleichgewichtszustandes einer elastischen Schale[4]), die die Form eines Umdrehungskörpers hat und unter dem Einfluß einer polarsymmetrischen Belastung steht, sind:

---

[1]) Vergleiche die Arbeiten der Anm. 1.

[2]) Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt, Monatsber. d. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1879. — Gesammelte Werke, S. 339; auch Ward, Philos. Magazine, Vol. XXV, London 1913, S. 85. — Mononobe, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1921, H. 6, S. 444. — Die technische Literatur hat bis jetzt die beachtenswerten Ideen dieser Arbeit von Kirchhoff nicht genügend ausgenutzt.

[3]) Siehe: H. Reißner, Beton und Eisen, 1908, S. 150. — E. Meißner, Vierteljahresschrift d. Naturf. Gesellsch., Zürich, 1917. — A. Dinnik, Die Nachrichten der Höheren Bergschule in Jekaterinoslaw, 1914 (russisch).

[4]) Drang und Zwang, Bd. 2, S. 40.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{d\alpha}(T_1 R_2 \sin\alpha) - T_2 R_1 \cos\alpha - N R_2 \sin\alpha + X R_1 R_2 \sin\alpha = 0 \\ &\frac{d}{d\alpha}(N R_2 \sin\alpha) + T_1 R_2 \sin\alpha + T_2 R_1 \sin\alpha + Z R_1 R_2 \sin\alpha = 0 \\ &\frac{d}{d\alpha}(G_1 R_2 \sin\alpha) - G_2 R_1 \cos\alpha - N R_1 R_2 \sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1).$$

Es bedeuten in diesen Gleichungen (1):

α den Winkel zwischen der äußeren Normale zur Mittelfläche und der Symmetrieachse der Schale (die vertikal nach oben gerichtete Symmetrieachse ist als positiv angenommen);

R_1 und R_2 Hauptkrümmungshalbmesser der Mittelfläche, wobei R_1 zum Meridianschnitte gehört;

X und Z die Projektionen der auf die Flächeneinheit der Schale wirkenden Belastung auf die Tangente zum Meridian (positiv in der Richtung des wachsenden Winkels α) bzw. auf die innere Normale zur Mittelfläche;

T_1 und T_2 Zugkräfte, die in den normalen Schalenschnitten in der Richtung des Parallelkreises bzw. des Meridians wirken;

G_1 und G_2 Momente, die in den normalen Schalenschnitten in der Richtung des Parallelkreises bzw. des Meridians wirken (positiv gerechnet, wenn sie die Schale konkav nach innen zu biegen suchen);

N die Querkraft, die im Normalschnitte der Schale in der Richtung des Parallelkreises wirkt (positiv gerechnet, wenn sie den Rand des abgetrennt gedachten oberen Teiles der Schale nach innen zu verschieben sucht);

die Größen T_1, T_2, G_1, G_2 und N sind auf die Längeneinheit der entsprechenden Normalschnitte bezogen.

Die Untersuchung der Deformation einer elastischen, isotropen Schale führt zu den folgenden Gleichungen[1]):

$$\left.\begin{aligned} &e_1 = \frac{1}{R_1}\left(\frac{du}{d\alpha} - w\right), \qquad e_2 = \frac{1}{R_2}(u \operatorname{ctg}\alpha - w) \\ &\varkappa_1 = \frac{1}{R_1}\frac{d\Theta}{d\alpha}, \qquad \varkappa_2 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{R_2}\Theta, \qquad \Theta = \frac{1}{R_1}\left(u + \frac{dw}{d\alpha}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und

$$\left.\begin{aligned} &T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(e_1 + \sigma e_2), \qquad T_2 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(e_2 + \sigma e_1) \\ &G_1 = -D(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \qquad G_2 = -D(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Hierin bedeuten:

$2h$ die Stärke der Schale, die wir — um einen ganz allgemeinen Fall zu untersuchen — als eine Funktion von α betrachten wollen;

E Modul von Joung
σ Poissonsche Konstante } für das Material der Schale;

D sogenannte »Zylindrische Steifigkeit« der Schale, die durch die Gleichung

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

bestimmt wird;

u und w die Projektionen der Verschiebung eines Elementes der Schale auf die Tangente zum Meridian bzw. auf die innere Normale zur Mittelfläche;

e_1 und e_2 die Dehnungen eines Elementes der Schale in den Richtungen des Meridians bzw. des Parallelkreises;

$\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die sogenannten »Krümmungsänderungen« in denselben Richtungen;

Θ eine Hilfsgröße, gleich der Aenderung des Winkels α infolge der Deformation.

Indem wir nun zu den anisotropen Schalen übergehen, wollen wir uns auf den für die Praxis wichtigsten Fall beschränken, daß jedes Element der Schale in bezug auf seine elastischen Eigenschaften drei zu einander senkrechte Symmetrieachsen besitzt; zwei dieser Achsen fallen mit den Tangenten zum Meridian bzw. des Parallelkreises der Mittelfläche zusammen. Wir bezeichnen mit E_1 und E_2 die Moduln von Joung in den Richtungen des Meridians und des Parallelkreises, mit σ_1 und σ_2 die diesen Richtungen entsprechenden Poissonschen Konstanten.

[1]) Siehe Drang und Zwang, Bd. 2, S. 41/42.

Durch einfache Rechnung überzeugen wir uns, daß die Gl. (3) durch die folgenden Gleichungen ersetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{\alpha_1}{1-\sigma_1\sigma_2}(e_1+\sigma_1 e_2), \qquad T_2 = \frac{\alpha_2}{1-\sigma_1\sigma_2}(e_2+\sigma_2 e_1) \\ G_1 &= -D_1(\varkappa_1+\sigma_1\varkappa_2), \qquad G_2 = -D_2(\varkappa_2+\sigma_2\varkappa_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3');$$

worin

$$\alpha_1 = 2E_1 h, \qquad \alpha_2 = 2E_2 h, \qquad D_1 = \frac{2E_1 h^3}{3(1-\sigma_1\sigma_2)}, \qquad D_2 = \frac{2E_2 h^3}{3(1-\sigma_1\sigma_2)} \quad . \quad (4').$$

Da wir später auch Schalen aus unhomogenem Material — z. B. Eisenbetonschalen — untersuchen, auf die die Gl. (4') nicht anwendbar ist, werden wir in der Folge die anisotropen Schalen von dem allgemeineren Fall der unhomogenen Schalen unterscheiden.

Wir formen das System der Gleichungen (1), (2), (3') und (4') um. Wir schreiben die dritte der Gl. (1) wie folgt:

$$\frac{d}{d\alpha}(R_2 G_1) + (R_2 G_1 - R_1 G_2)\operatorname{ctg}\alpha - NR_1 R_2 = 0 \quad \ldots \quad (5).$$

In die dritte und vierte der Gl. (3') führen wir anstatt $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ deren Werte aus den drei Gl. (2) ein.:

$$G_1 = -D_1\left(\frac{\Theta'}{R_1}+\sigma_1\frac{\Theta}{R_2}\operatorname{ctg}\alpha\right), \qquad G_2 = -D_2\left(\frac{\Theta}{R_2}\operatorname{ctg}\alpha+\sigma_2\frac{\Theta'}{R_1}\right) \quad . \quad (6).$$

Eliminieren wir aus den Gl. (5) und (6) die Größen G_1 und G_2, so kommen wir zur Gleichung

$$\frac{R_2}{R_1}\Theta'' + \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)' + \frac{R_2}{R_1}\left(\operatorname{ctg}\alpha + \frac{D_1'}{D_1}\right) + \frac{D_1\sigma_1 - D_2\sigma_2}{D_1}\operatorname{ctg}\alpha\right]\Theta'$$
$$-\left[\sigma_1\left(1-\frac{D_1'}{D_1}\operatorname{ctg}\alpha\right)+\frac{D_2 R_1}{D_1 R_2}\operatorname{ctg}^2\alpha\right]\Theta + \frac{N R_1 R_2}{D_1} = 0 \quad \ldots \quad (7),$$

die wir zur Abkürzung schreiben:

$$p\Theta'' + q\Theta' + r\Theta + sV = 0 \quad \ldots \quad (7'),$$

worin

$$V = NR_2 \quad \ldots \quad (8),$$

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{R_2}{R_1}, \qquad q = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)' + \frac{R_2}{R_1}\left(\operatorname{ctg}\alpha + \frac{D_1'}{D_1}\right) + \frac{D_1\sigma_1 - D_2\sigma_2}{D_1}\operatorname{ctg}\alpha \\ r &= -\left[\sigma_1\left(1-\frac{D_1'}{D_1}\operatorname{ctg}\alpha\right)+\frac{D_2}{D_1}\frac{R_1}{R_2}\operatorname{ctg}^2\alpha\right], \qquad s = \frac{R_1}{D_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9).$$

Jetzt eliminieren wir aus der ersten, zweiten und letzten der Gl. (2) die Größen u und w und bekommen [1])

$$\frac{d}{d\alpha}(R_2 e_2) + (R_2 e_2 - R_1 e_1)\operatorname{ctg}\alpha + R_1\Theta = 0 \quad \ldots \quad (10).$$

Integrieren wir die ersten zwei der Gl. (1), so finden wir:

$$T_1 = -N\operatorname{ctg}\alpha - \frac{F(\alpha)}{R_2\sin^2\alpha}, \qquad T_2 = -\frac{1}{R_1}\frac{d(NR_2)}{d\alpha} + \frac{F(\alpha)}{R_1\sin^2\alpha} - ZR_2 \quad . \quad (11),$$

wobei

$$F(\alpha) = \int R_1 R_2 \sin\alpha\,[X\sin\alpha + Z\cos\alpha]\,d\alpha + \text{konst.}$$

aus den Gl. (3') und (11), finden wir:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= -\frac{N}{\alpha_1}\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\sigma_1(NR_2)'}{R_1\alpha_2} - \frac{F(\alpha)}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{R_2\alpha_1}+\frac{\sigma_1}{R_1\alpha_2}\right) + \frac{ZR_2\sigma_1}{\alpha_2} \\ e_2 &= -\frac{(NR_2)'}{R_1\alpha_2} + \frac{\sigma_2}{\alpha_1}N\operatorname{ctg}\alpha + \frac{F(\alpha)}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{R_1\alpha_2}+\frac{\sigma_2}{R_2\alpha_1}\right) - \frac{ZR_2}{\alpha_2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (12).$$

Substituieren wir diese Werte von e_1 und e_2 in die Gl. (10), so kommen wir unter Berücksichtigung der Gl. (8) zu der Gleichung:

$$\frac{R_2}{R_1}V'' + \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)' + \frac{R_2}{R_1}\left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}\right) + \frac{\sigma_1\alpha_1 - \sigma_2\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{ctg}\alpha\right]V'$$
$$+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[\sigma_2\left(1+\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\operatorname{ctg}\alpha\right)-\frac{R_1}{R_2}\operatorname{ctg}^2\alpha\right]V - R_1\Theta\alpha_2 = \varphi(\alpha) \quad . \quad (13),$$

[1]) Siehe z. B. die angeführte Arbeit von H. Reißner, oder Drang und Zwang Bd. 2, § 60.

wo

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha_2}{\sin\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{F(\alpha)}{\sin\alpha}\left(\frac{R_2}{R_1\alpha_2}+\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\right)-\frac{Z R_2^2}{\alpha_2}\sin\alpha\right]+\frac{F(\alpha)\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{R_1}{R_2}+\sigma_1\right)$$
$$- Z R_1 R_2 \sigma_1 \operatorname{ctg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Zur Abkürzung schreiben wir die Gl. (13) in der Form

$$p V'' + q_1 V' + r_1 V + s_1 \Theta = \varphi(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13'),$$

worin

$$q_1 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)' + \frac{R_2}{R_1}\left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}\right) + \frac{\alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\sigma_2}{\alpha_1}\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$r_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[\sigma_2\left(1+\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\operatorname{ctg}\alpha\right) - \frac{R_1}{R_2}\operatorname{ctg}^2\alpha\right], \qquad s_1 = -R_1\alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

2. Die Integrationsmethode. Die Berechnung einer symmetrischen, anisotropen Schale ist somit auf die Integration des Systems der Gl. (7) und (13) zurückgeführt. Eliminieren wir eine der unbekannten Funktionen, so kommen wir zu einer Differentialgleichung vierter Ordnung. Der Grundgedanke Meißners lief darauf hinaus, zu untersuchen, in welchem Falle die Integration dieser Gleichung auf die Integration von zwei voneinander unabhängigen Gleichungen zweiter Ordnung zurückgeführt werden kann.

Wir schlagen hier eine andere Lösung der Gl. (7) und (13) vor, beruhend auf dem bekannten Prinzip der Multiplikatoren zur Integration eines Systems von linearen Differentialgleichungen von D'Alembert.

Führen wir in die Gl. (13') eine neue Variable W nach der Formel

$$V = W - \Theta k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ein, wobei k eine Funktion von α ist, die wir nachher bestimmen werden, und eliminieren wir mittels der Gl. (7') aus der so erhaltenen Gleichung Θ'', so erhalten wir

$$p W'' + q_1 W' + (r_1 + sk) W - \Theta'[2pk' - (q - q_1)k] - \Theta[pk'' + q_1 k' + sk^2$$
$$+ (r_1 - r)k - s_1] = \varphi(\alpha).$$

Diese Gleichung geht, wenn die Bedingungen

$$2pk' - (q - q_1)k = 0, \quad pk'' + q_1 k' + sk^2 + (r_1 - r)k - s_1 = 0 \quad . \quad . \quad (17)$$

erfüllt sind, in die Gleichung:

$$p W'' + q_1 W' + (r_1 + sk) W = \varphi(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

über. Bestimmen wir aus der ersten der Gl. (17)

$$k = k_0 e^{\int \frac{q - q_1}{2p} d\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

wo k_0 — eine beliebige konst. Größe ist und führen wir diesen Wert k in die zweite der Gl. (17) ein, so finden wir:

$$e^{\int \frac{q - q_1}{p} d\alpha} \cdot s k_0^2 + e^{\int \frac{q - q_1}{2p} d\alpha} \cdot \left[\frac{q^2 - q_1^2}{4p} + p\left(\frac{q - q_1}{2p}\right)' + r_1 - r\right] k_0 - s_1 = 0 \quad (20).$$

Soll diese Gleichung für k_0 nur konst. Größen liefern, so ist es notwendig, daß das Verhältnis der Koeffizienten konstant sei, d. h.:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{s} e^{-\int \frac{q^2 - q_1^2}{2p} d\alpha} \cdot \left[\frac{q - q_1}{4p} + p \cdot \left(\frac{q - q_1}{2p}\right)' + r_1 - r\right] = \text{konst.} \\ &\frac{s_1}{s} e^{-\int \frac{q - q_1}{p} d\alpha} = \text{konst.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (21).$$

In den folgenden Untersuchungen kommt für uns nur der Fall in Frage, wo die Wurzeln der Gl. (20) verschieden sind[1]). Wir bezeichnen diese Wurzeln durch k_{01} und

[1]) Wir beschränken uns bei den Untersuchungen in diesen § auf das, was für das weitere notwendig ist, wir wollen hier nur andeuten, daß für den Fall, wo die Gl. (20) nur eine konstante Wurzel hat, sei es, weil die Wurzeln gleich sind oder weil die zweite Wurzel eine veränderliche Größe ist, sich die Aufgabe bedeutend vereinfacht, da wir mittels dieser einen Wurzel die Gl. (18) integrieren können, und dann die Beziehung $V + k\Theta = W$ erhalten, wo W eine bekannte Funktion sein wird. Indem wir diese Gleichung anwenden, können wir z. B. V aus der Gl. (7') eliminieren, und kommen damit wiederum zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integration die Aufgabe erschöpft. Wenn die Wurzeln der Gl. (20) gleich sind, sind noch andere Vereinfachungen möglich.

k_{02}, die ihnen entsprechenden Werte von k durch k_1 und k_2 und substituieren diese Werte k in die Differentialgleichung (18). Nehmen wir nun zunächst einmal an, daß es uns gelungen sei, ihre allgemeinen Integrale zu finden, die wir, den Größen k_1 und k_2 entsprechend, mit W_1 und W_2 bezeichnen.

Dann wäre die Bestimmung der Funktionen V und Θ nach der Gl. (16) auf die Lösung des Systems der Gleichungen

$$V + \Theta k_1 = W_1, \quad V + \Theta k_2 = W_2$$

zurückgeführt. Aus diesen Gleichungen finden wir

$$\Theta = \frac{W_2 - W_1}{k_2 - k_1}, \qquad V = \frac{k_2 W_1 - k_1 W_2}{k_2 - k_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Auf diese Weise wird in diesem Falle die Integration des Systems der Differentialgleichungen (7′) und (13′) durch Integration nur der einen Gl. (18) ersetzt.

Die Funktion $q(\alpha)$ hängt von der Art der Belastung ab. Die ihr entsprechende, spezielle Lösung wird nach unserer Methode aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gewonnen; bei der Anwendung von anderen Methoden ist man gezwungen, die spezielle Lösung einer Differentialgleichung vierter Ordnung, oder zwei spezielle Lösungen zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu finden.

Wir wenden jetzt die vorstehende Methode auf die Gl. (7) und (13) an.

Indem wir in den Gl. (21) und (18) die Werte der dort auftretenden Funktionen aus den Gl. (9) und (15) substituieren, finden wir:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{s_1}{s}\, e^{-\int \frac{q-q_1}{p}\, d\alpha} = e^{\sigma_2 \int \left(\frac{D_2}{D_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha} = \text{Konst.} \\
&\frac{1}{s}\, e^{-\int \frac{q-q_1}{2p}\, d\alpha} \left[\frac{q^2 - q_1^2}{4p} + p\left(\frac{q-q_1}{2p}\right)' + r_1 - r\right] = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{D_1}{\alpha_2}}\, e^{\frac{\sigma_2}{2}\int \left(\frac{D_2}{D_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha} \left\{\frac{1}{4}\left[\frac{D_1'}{D_1}\right.\right. \\
&\quad + \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} - \sigma_2 \left(\frac{D_2}{D_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}\alpha\Big] \cdot \left[2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)' + 2\,\frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg}\alpha + \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{D_1'}{D_1} - \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}\right)\right. \\
&\quad + 2\,\sigma_1 \operatorname{ctg}\alpha - \sigma_2 \left(\frac{D_2}{D_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \operatorname{ctg}\alpha\Big] + \frac{R_2}{2\,R_1}\left[\frac{D_1'}{D_1} + \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} - \sigma_2 \left(\frac{D_2}{D_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}\alpha\right]' \\
&\quad + \frac{\alpha_2\,\sigma_2}{\alpha_1}\left(1 + \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} \operatorname{ctg}\alpha\right) + \sigma_1\left(1 - \frac{D_1'}{D_1} \operatorname{ctg}\alpha\right) + \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{D_2}{D_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \operatorname{ctg}^2\alpha\Big\} = \text{Konst.}
\end{aligned}\right\} \quad (23),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{R_2}{R_1}\, W'' + \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)' + \frac{R_2}{R_1}\left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}\right) + \frac{\sigma_1\,\alpha_1 - \sigma_2\,\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{ctg}\alpha\right] W' \\
&+ \left\{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[\sigma_2\left(1 + \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} \operatorname{ctg}\alpha\right) - \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}^2\alpha\right] + k\,\frac{R_1}{D_1}\right\} W = q(\alpha)
\end{aligned}\right\} \quad (24).$$

Da aus den Gl. (4′) folgt, daß

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{E_2}{E_1} = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

wo m eine zur Abkürzung eingeführte, neue Konstante ist, so ist die erste der Gl. (23) identisch befriedigt, und die zweite geht über in

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{R_2}{R_1^2}\sqrt{\frac{D_1}{\alpha_2}}\left\{\frac{d^2 \lg D_1\,\alpha_2}{d\,\alpha^2} + \frac{d}{d\,\alpha} \lg\left(\frac{R_2 \sin\alpha}{R_1}\sqrt{\frac{D_1}{\alpha_2}}\right) \frac{d \lg D_1\,\alpha_2}{d\,\alpha}\right\} \\
&+ 2\,(\sigma_1 + m\,\sigma_2)\left(1 - \operatorname{ctg}\alpha\,\frac{d}{d\,\alpha} \lg\sqrt{\frac{D_1}{\alpha_2}}\right) \frac{R_1}{R_2}\Big\} = \text{Konst.}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Indem wir in diese Gleichung die Werte D_1, D_2, α_1 und α_2 aus der Gl. (4′) einführen, gelangen wir zur folgenden Gleichung:

$$\frac{1}{R_1}\left\{\frac{R_2}{R_1}\, h'' + \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)' + \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{\sigma_1 + m\,\sigma_2}{2}\right) \operatorname{ctg}\alpha\right] h' + \frac{\sigma_1 + m\,\sigma_2}{2}\, h\right\} = \text{Konst.} \quad . \quad (26').$$

Ist die Gl. (26) oder (26′)[1]) befriedigt, so ist die Integration des Systems der Gl. (6) und (13) auf die Integration der Gl. (24) zurückgeführt. Sind die Gleichung der Mittel-

[1]) Wir halten es für nützlich, hier wie auch weiter den Fall der unhomogenen Schalen, für die $\frac{D_2}{D_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ist, während die Funktionen dieser Gleichung nach Formeln, die von (4′) verschieden sind, definiert werden, getrennt zu untersuchen.

fläche und folglich auch die Krümmungshalbmesser R_1 und R_2 als Funktionen des Winkels α gegeben, so erhalten wir aus der Gl. (26) die Differentialgleichung zur Ermittelung der Schalenstärke $2h$; sind jedoch die Größen D_1 und α_2 in der Gl. (26) oder h in der Gl (26') gegeben, so erhalten wir eine Differentialgleichung, die den Meridianschnitt der Mittelfläche bestimmt.

Die Integration der Gl. (26') in der allgemeinen Form ist von E. Meißner angegeben [1]).

Die Gl. (26) kann man leicht integrieren. Da sie aber zwei Funktionen von α, und zwar D_1 und α_2, enthält, so enthält das Integral noch eine willkürliche Funktion von α.

Wir halten uns bei dieser Integration nicht auf, da sie nur theoretisches Interesse hat und wir für die einfacheren Fälle der konischen und zylindrischen Schalen die Berechnungen so ausführlich durchführen, daß es nicht schwer fallen kann, sie auf die Gl. (26) anzuwenden.

Wir wollen nun einige spezielle, aber für die Praxis sehr wichtige Fälle untersuchen:

a) Aus der Gl. (26) folgt, daß für D_1 und $\alpha_2 =$ konst. auch R_1 konst. sein muß, und da für eine Schale konst. Stärke infolge Gl. (25), $q = q_1$ sein muß, so gehen die Gl (19) und (20) nach kleinen Umformungen in:

$$k = k_0, \quad \frac{R_1}{D_1} k_0^2 + (\sigma_1 + m\,\sigma_2)\, k_0 + R_1\, \alpha_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

über.

Es ist leicht, sich davon zu überzeugen, daß diese letzte Gleichung für alle in der Praxis möglichen Fälle verschiedene Wurzeln hat, und wir kommen somit zum Ergebnis:

Die Berechnung einer elastischen, anisotropen Schale, welche die Form eines Umdrehungskörpers hat und unter dem Einflusse einer polarsymmetrischen Belastung steht, kann, wenn Wandstärke und Krümmungshalbmesser des Meridianschnittes der Mittelfläche konstante Größen sind, auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt werden [2]).

Für die isotropen Schalen, die ein Spezialfall der anisotropen bilden, wurde dieser Satz von Meißner bewiesen.

b) Für einige Materialien (Gußeisen, Beton u. a.) ist die Poissonsche Zahl σ eine kleine und schwer bestimmbare Größe; manchmal empfehlen A. und L. Föppl [3]) zur Vereinfachung der Rechnung $\sigma = 0$ zu setzen.

Unter der Annahme $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ finden wir, daß die Gl. (26) durch die Lösung D_1, D_2, α_1, $\alpha_2 =$ konst. unabhängig von der Form der Schale befriedigt wird, und die Gl. (20) hat dann zwei ungleiche konstante Wurzeln:

$$k = k_0 = \pm \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \pm \sqrt{-D_1\, \alpha_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Wir kommen somit zum Schlusse, daß bei der Annahme $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ die Berechnung einer elastischen, anisotropen Schale von konstanter Stärke auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung hinauskommt. Diese Gleichung leiten wir aus der Gl. (18) in folgender Form ab:

$$W'' + \left[\frac{d}{d\,\alpha} \lg \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1}\right] W' - \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2} \left[m \operatorname{ctg}^2 \alpha \pm R_2\, \alpha_2 \sqrt{-D_1\, \alpha_2}\,\right] W = \frac{R_1}{R_2}\, q\,(\alpha) \,. \quad (29).$$

3. Sphärische Schalen. Für die sphärische Schale, die wir eingehender untersuchen wollen, bezeichnen wir den Krümmungsradius der Mittelfläche mit

$$R = R_1 = R_2 \,.$$

Die Gl. (24) geht hierfür in:

$$W'' + A \operatorname{ctg} \alpha\, W' + (B - C \operatorname{ctg}^2 \alpha)\, W = q\,(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

über, wobei folgende Abkürzungen eingeführt worden sind:

$$A = 1 + \sigma_1 - m\,\sigma_2, \quad B = \frac{R}{D_1} k_0 + m\,\sigma_2, \quad C = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

---

[1]) a. A. von 1915.

[2]) Dieses Ergebnis bezieht sich auch auf die konischen Schalen, deren Untersuchung wir weiter folgen lassen.

[3]) Ausführliche Begründung siehe Drang und Zwang B. 1, S 27, II. Auflage.

Wir wollen uns auf die Integration der Gleichung

$$W'' + A \operatorname{ctg} \alpha\, W' + (B - C \operatorname{ctg}^2 \alpha)\, W = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30')$$

beschränken, da wir vom Integral dieser Gleichung, nach allgemeinen Regeln, zum Integral der Gl. (30) übergehen können, und man die spezielle Lösung der Gl. (30) unmittelbar finden kann. Außerdem kann nach den Arbeiten von Reißner u. a. die Untersuchung der sphärischen Schalen, z. B. unter dem ausschließlichen Einflusse ihres Eigengewichtes, in zwei Teilaufgaben zerlegt werden: Erstens, die Berechnung der frei aufliegenden Schale unter dem Einflusse des Eigengewichtes, wobei die rechnerische Behandlung für die isotropen und anisotropen Schalen grundsätzlich ganz gleich ist und keine Schwierigkeiten bietet; zweitens, die Ermittlung der Spannungen in der Schale, infolge einer elastischen Einspannung der Ränder oder infolge von Randkräften, wobei die Integration der Gl. (30') notwendig wird. Um die Gl. (30') auf die Form einer Gleichung der hypergeometrischen Reihe zu bringen, führen wir neue Veränderliche, gemäß

$$x = \sin^2 \alpha, \quad W = x^\mu t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

ein, wo μ eine konstante Größe ist, und erhalten

$$4\, x^{\mu+1}(1-x)\frac{d^2 t}{dx^2} + 2\, x^{\mu}\left[1 + A + 4\,\mu - (2 + A + 4\,\mu)\, x\right]\frac{dt}{dx}$$
$$+ x^{\mu-1}\left[4\,\mu^2 + 2\,\mu\,(A-1) - C - x\,(4\,\mu^2 + 2\,A\,\mu - B - C)\right] t = 0.$$

Wir bestimmen μ aus der Gleichung

$$4\,\mu^2 + 2\,\mu\,(A-1) - C = 0,$$

wobei wir uns auf die positive Wurzel

$$\mu = \frac{m\,\sigma_2 - \sigma_1 + \sqrt{(m\,\sigma_2 - \sigma_1)^2 + 4\,m}}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

beschränken, wie es die Substitutionen (32) fordern; indem wir diesen Ausdruck für μ in die oben angegebene Differentialgleichung einführen, und gleichzeitig A, B und C durch ihre Werte nach Gl. (31) und k_0 nach der Gl. (27) ersetzen, erhalten wir, wenn wir noch durch $4\,x^\mu$ kürzen:

$$\left.\begin{aligned} &x\,(1-x)\frac{d^2 t}{dx^2} + \left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_1 - m\,\sigma_2)^2 + 4\,m} - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_1 - m\,\sigma_2)^2 + 4\,m}\right)x\right]\frac{dt}{dx} \\ &- \left[\frac{\sqrt{(\sigma_1 - m\,\sigma_2)^2 + 4\,m}}{8} \mp \frac{1}{8}\sqrt{(\sigma_1 + m\,\sigma_2)^2 - \frac{12\,R^2\,(1 - \sigma_1\,\sigma_2)}{h^2}}\right] t = 0 \end{aligned}\right\} \quad (34).$$

Wir kommen also zum Schlusse, daß die Berechnung einer sphärischen, anisotropen Schale, deren Stärke konstant ist, auf die Integration einer Gleichung einer hypergeometrischen Reihe zurückgeführt ist.

Um den von Meißner behandelten Sonderfall einer isotropen Schale, zu erhalten, müssen wir $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $m = 1$ und folglich $\mu = 1/2$ setzen, womit die Gl. (34) in:

$$x\,(1-x)\frac{d^2 t}{dx^2} + \left(2 - \frac{5}{2}\,x\right)\frac{dt}{dx} - \left(\frac{1}{4} \mp \frac{1}{4}\sqrt{\sigma^2 - \frac{3\,R^2\,(1-\sigma^2)}{h^2}}\right) t = 0 \quad . \quad (34')$$

übergeht, die mit der entsprechenden Gleichung von Meißner[1]) genau übereinstimmt. Ungeachtet der Verschiedenheit der Methoden, die wir hier und Meißner in seiner Arbeit angewandt haben, kommen wir also, wie es auch zu erwarten war, zum gleichen Ergebnis.

Aus dem Vergleich der Gl. (34) mit der Kanonform der Gleichung der hypergeometrischen Reihe

$$x\,(1-x)\frac{d^2 t}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,x]\frac{dt}{dx} - \alpha\,\beta\, t = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34'')$$

folgt, daß in unserem Falle

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_1 - m\,\sigma_2)^2 + 4\,m}, \quad \alpha + \beta = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(\sigma_1 - m\,\sigma_2)^2 + 4\,m} + 1\right], \\ &\alpha\,\beta = \frac{1}{8}\left[\sqrt{(\sigma_1 - m\,\sigma_2)^2 + 4\,m} \mp \sqrt{(\sigma_1 + m\,\sigma_2)^2 - \frac{12\,R^2\,(1 - \sigma_1\,\sigma_2)}{h^2}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (35).$$

[1]) Siehe Gl. (18) der in 1) angegebenen Arbeit.

Zur Untersuchung[1]) des Integrals der Gl. (34) beachten wir, daß, wenn der Ausdruck

$$1-\gamma=-\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_1-m\,\sigma_2)^2+4\,m}$$

keine ganze Zahl ist, das Integral der Gl. (34″) die Form

$$t=C_1\,F(\alpha,\beta,\gamma,x)+C_2\,x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,x) \quad . \quad (36)$$

hat, wo C_1 und C_2 beliebige Konstante sind. Falls $1-\gamma$ einer ganzen negativen Zahl gleich ist (für eine isotrope Schale ist diese Zahl gleich -1), so hat das Integral der Gl. (34″) die Form:

$$t=C_1\,F(\alpha,\beta,\gamma,x)+C_2\,[F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)+F(\alpha,\beta,\gamma,x)\lg x] \quad . \quad . \quad (36'),$$

wo $F_1(\alpha,\beta,\gamma,x)$ eine Funktion, deren Berechnung im allgemeinen keine Schwierigkeiten bietet. Da aus der Gl. (35) folgt, daß $1-\gamma$ weder 0 noch eine positive ganze Zahl sein kann, und auch, daß die Größen α und β nicht einer ganzen nicht komplexen Zahl gleich sein können, so ist durch diese zwei Fälle die Untersuchung erledigt. Es ist charakteristisch, daß im Integral der Gl. (34) die Funktion $\lg x$ nur in denjenigen Fällen erscheint, die man als spezielle Fälle betrachten darf ($\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_1-m\,\sigma_2)}+4\,m$ gleich einer ganzen Zahl), dagegen in dem allgemeinen Falle der anisotropen Schale nur $x^{1-\gamma}$ als die Funktion die für $x=0$ (was der Spitze der Schale entspricht) unendlich groß wird, vorkommt.

4. Kegelschalen. Zur Untersuchung der konischen Schale ist eine besondere Ableitung der Differentialgleichung notwendig, da in diesem Falle R_1 als Krümmungsradius des Meridianschnittes unendlich groß wird. Wir wollen durch β den Winkel zwischen der Mantellinie und der Achse des Kegels, durch ξ den Abstand von der Spitze des Kegels bis zu einem Schalenelement bezeichnen.

Um von den Gl. (7) und (13) zu den entsprechenden Gleichungen für die Kegelschale überzugehen, teilen wir beide Seiten dieser Gleichungen durch R_1, und formen sie dann um[2]), indem wir einsetzen

$$R_1\,d\,\alpha=d\,\xi\,,\qquad R_1=\infty\,,\qquad \alpha=\pi/2-\beta\,,\qquad R_2=\xi\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Wir erhalten dann:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi\frac{d^2\Theta}{d\,\xi^2}+\left[1+\sigma_1-\frac{D_2}{D_1}\sigma_2+\frac{\xi}{D_1}\frac{d\,D_1}{d\,\xi}\right]\frac{d\Theta}{d\,\xi}+\left[\frac{\sigma_1}{D_1}\frac{d\,D_1}{d\,\xi}-\frac{1}{\xi}\frac{D_2}{D_1}\right]\Theta+\frac{V}{D_1\,\mathrm{tg}\,\beta}=0\,,\\
&\xi\frac{d^2V}{d\,\xi^2}+\left[1+\sigma_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sigma_2-\frac{\xi}{\alpha_2}\frac{d\,\alpha_2}{d\,\xi}\right]\frac{d\,V}{d\,\xi}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{d\,\alpha_1}{d\,\xi}-\frac{1}{\xi}\right]V-\frac{\Theta\alpha_2}{\mathrm{tg}\,\beta}=q_1(\xi)
\end{aligned}\right\} \quad (37),$$

wo

$$q_1(\xi)=\frac{\alpha_2}{\cos\beta}\frac{d}{d\,\xi}\left[\frac{\sigma_2}{\alpha_1}F_1(\xi)-Z\frac{\xi^2\sin\beta}{\alpha_2}\right]+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{F_1(\xi)}{\xi\cos\beta}-\sigma_1\,Z\,\xi\,\mathrm{tg}\,\beta \quad . \quad (38).$$

und

$$F_1(\xi)=\int\xi\,[X\cos\beta+Z\sin\beta]\,d\,\xi+\text{Konst.} \qquad \text{ist.}$$

Zur Ermittlung der Bedingungen, unter welchen die Integration dieses Systems von Gleichungen auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückzuführen ist, wenden wir die Formeln, die wir für das System der Gleichungen (7′) und (13′) abgeleitet haben, an, wobei es ohne weiteres klar ist, daß die Werte der Koelfizienten für diesen Fall durch folgende Ausdrücke zu ersetzen sind:

$$p=\xi\,,\quad q=1+\sigma_1-\frac{D_2}{D_1}\sigma_3+\frac{\xi}{D_1}\frac{d\,D_1}{d\,\xi}\,,\quad r=\frac{\sigma_1}{D_1}\frac{d\,D_1}{d\,\xi}-\frac{1}{\xi}\frac{D_2}{D_1}\,,\quad s=\frac{1}{D_1\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$q_1=1+\sigma_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sigma_2-\frac{\xi}{\alpha_2}\frac{d\,\alpha_2}{d\,\xi}\,,\quad r_1=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left[\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{d\,\alpha_1}{d\,\xi}-\frac{1}{\xi}\right],\quad s_1=-\frac{\alpha_2}{\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Die Gl. (21) sehen jetzt wie folgt aus:

$$\left.\begin{aligned}
&e^{\sigma_2\int\left(\frac{D_2}{D_1}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{d\,\xi}{\xi}}=\text{Konst.}\\
&e^{\frac{\sigma_2}{2}\int\left(\frac{D_2}{D_1}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{d\,\xi}{\xi}}\,\mathrm{tg}\,\beta\,\sqrt{\frac{D_1}{\alpha_2}}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{d\lg D_1\,\alpha_2}{d\,\xi}-\frac{\sigma_2}{\xi}\left(\frac{D_2}{D_1}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right]\left[2+2\,\sigma_1-\sigma_2\left(\frac{D_2}{D_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.+\xi\frac{d}{d\,\xi}\lg\frac{D_1}{\alpha_2}\right]+\frac{\xi}{2}\left[\frac{d\lg D_1\,\alpha_2}{d\,\xi}-\frac{\sigma_2}{\xi}\left(\frac{D_2}{D_1}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right]'\\
&\qquad\left.+\left[\frac{1}{\xi}\left(\frac{D_2}{D_1}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)-\frac{\sigma_1}{D_1}\frac{d\,D_1}{d\,\xi}+\frac{\alpha_2\,\sigma_2}{\alpha_1^2}\frac{d\,\alpha_1}{d\,\xi}\right]\right\}=\text{Konst.}
\end{aligned}\right\} \quad (39).$$

[1]) Siehe z. B. »Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen« L. Schlesinger, Leipzig 1904 (Sammlung Schubert). — [2]) Siehe die schon genannte Arbeit von Meißner § 8.

Die erste dieser zwei Gleichungen wird auf Grund der Gl. (25) identisch befriedigt, und die zweite Gleichung nimmt die Form:

$$\sqrt{\frac{D_1}{\alpha_2}}\left\{\xi\frac{d^2 \lg D_1\,\alpha_2}{d\,\xi^2}+\left[1+\xi\frac{d}{d\,\xi}\lg\sqrt{\frac{D_1}{\alpha_2}}\right]\frac{d\lg D_1\,\alpha_2}{d\,\xi}-2\,(\sigma_1+m\,\sigma_2)\frac{d}{d\,\xi}\lg\sqrt{\frac{D_1}{\alpha_2}}\right\}=C_1 \quad (39')$$

an, wo C_1 eine konstante Größe ist. Der Gl. (18) entspricht die Gleichung

$$\xi\frac{d^2 W}{d\,\xi^2}+\left(1+\sigma_1-m\,\sigma_2-\frac{\xi}{\alpha_2}\frac{d\,\alpha_2}{d\,\xi}\right)+\left[m\left(\frac{\sigma_2}{\alpha_1}\frac{d\,\alpha_1}{d\,\xi}-\frac{1}{\xi}\right)+\frac{k}{D_1\,\mathrm{tg}\,\beta}\right]W=\eta_1(\xi) \quad (40).$$

Wir integrieren die Gl. (39') ohne beschränkende Annahmen in Bezug auf das Verhältnis zwischen den Funktionen D_1 und α_2.

Wir führen die Bezeichnung ein:

$$\sqrt{\frac{D_1}{\alpha_2}}=\psi(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

und indem wir diese Funktion als bekannt annehmen, finden wir das Integral der Gl. (39'), die von erster Ordnung in Bezug auf $\frac{d}{d\,\xi}\lg D_1\,\alpha_2$ ist:

$$\frac{d}{d\,\xi}\lg D_1\,\alpha_2=\frac{1}{\xi\,\psi(\xi)}\left[2\,(\sigma_1+m\,\sigma_2)\,\psi(\xi)+C_1\,\xi+C\right],$$

wo C eine willkürliche Konstante ist.

Aus dieser Gleichung und der Gl. (41) finden wir endgültig:

$$\alpha_2=\alpha_{20}\frac{\xi^{\sigma_1+m\sigma_2}}{\psi(\xi)}\,e^{\int\frac{C_1\xi+C}{\xi\psi(\xi)}d\xi}, \quad D_1=D_{10}\,\psi(\xi)\,\xi^{\sigma_1+m\sigma_2}\,e^{\int\frac{C_1\xi+C}{\xi\psi(\xi)}d\xi} \quad . \quad (42),$$

wo α_{20} und D_{10} — willkürliche Konstante, und $\psi(\xi)$ eine willkürliche Funktion sind. Indem wir verschiedene Annahmen über die Funktion $\psi(\xi)$ treffen, bekommen wir eine Reihe von partiellen Integralen. Die Funktionen α_2 und D_1 sind gewöhnlich miteinander durch irgend eine Relation verbunden und dadurch wird auch die Form der Funktion $\psi(\xi)$ bestimmt.

Die Ermittlung dieser Form kann manchmal auf Schwierigkeiten stoßen, geschieht aber in besonderen Fällen meist mühelos.

Nehmen wir zum Beispiel an, α_1 und D_1 befriedigen die Gl. (4'). Setzen wir $\alpha_{20}=2\,E_2$ und $D_{10}=\frac{2\,E_1}{3\,(1-\sigma_1\,\sigma_2)}$ so finden wir aus der Gl. (4') $\frac{D_1}{D_{10}}=\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{20}}\right)^3$. Substituieren wir hierin aus Gl. (42) die Verhältnisse $D_1:D_{10}$ und $\alpha_2:\alpha_{20}$ und bilden die logarithmische Ableitung, so finden wir:

$$\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}-\frac{\sigma_1+m\,\sigma_2}{2\,\xi}-\frac{C_1\,\xi+C}{2\,\xi\,\psi(\xi)}=0$$

und folglich

$$\psi(\xi)=C+C_1\,\xi+C_2\,\xi^{\frac{\sigma_1+m\sigma_2}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43),$$

wo C_2 eine willkürliche Konstante ist. Dieses Integral ist schon von E. Meißner angegeben, der den Fall $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ untersucht hat. Im Falle $\sigma_1=\sigma_2=0$ ist

$$\psi(\xi)=C+C_1\,\xi+C_2\lg\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43').$$

Sind die Gl. (4') befriedigt, so unterscheidet sich wie aus der Gl. (41) folgt, die Funktion $\psi(\xi)$ nur durch einen konstanten Faktor von der Stärke der Schale $2\,h$. Untersuchen wir ausführlicher die für die Praxis wichtige Lösung

$$2\,h=c+c_1\,\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44),$$

wo c und c_1 konstante Größen sind. Die Gl. (19) und (20) erhalten unter Berücksichtigung der Gl. (4') und der Bedingung (44) folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} k&=k_0\,(c+c_1\,\xi)^2\\ k_0^2+\frac{E_1\,c_1\,(2-\sigma_1-m\,\sigma_2)}{12\,(1-\sigma_1\,\sigma_2)}\,\mathrm{tg}\,\beta\,k_0+\frac{E_1\,E_2}{12\,(1-\sigma_1\,\sigma_2)}&=0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Für $c_1=0$, d. h. für die Schale konst. Stärke, bekommen wir zwei verschiedene Werte für k_0, und zwar:

$$k_0=\pm\,i\sqrt{\frac{E_1\,E_2}{12\,(1-\sigma_1\,\sigma_2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45'),$$

aber auch für $c_1 \neq 0$ sind die Wurzeln der zweiten der Gl. (45) für alle in der Praxis vorkommende Fälle zwei voneinander verschiedene komplexe Zahlen. Um sich hiervon zu überzeugen, muß man berücksichtigen, daß die Konstante c_1 eine kleine Größe ist, da die Stärke der Schale $2h$ klein ist im Vergleich zu dem Abstande vom unteren Rande der Schale bis zur Spitze des Kegels. Nehmen wir beispielsweise an $E_1 = E_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$, $c_1 = 0{,}1$, dann muß man, damit die zwei Wurzeln der Gl. (45) untereinander gleich werden, die Größe von tg β zu 35 bis 40 annehmen, was selbstverständlich einen Ausnahmefall bildet. So kommen wir zum Schlusse, daß die Berechnung der anisotropen Schalen, deren Stärke sich nach einer linearen Funktion der Länge der Mantellinie ändert, auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückzuführen ist. Um diese Gleichung in expliziter Form niederzuschreiben, setzen wir in die Gleichung (40) die Werte von α_1, α_2 und D_1 aus den Gl. (4') und die Werte von $2h$ und c aus den Gl. (40) bzw. (45) ein und finden:

$$\left.\begin{aligned} \xi \frac{d^2 W}{d \xi^2} + \left(1 + \sigma_1 - m\,\sigma_2 - \frac{c_1 \xi}{c + c_1 \xi}\right) \frac{d W}{d \xi} + \left[\frac{E_1 m \sigma_2 c_1 \operatorname{tg} \beta + 12 k_0 (1 - \sigma_1 \sigma_2)}{E_1 \operatorname{tg} \beta\, c + c_1 \xi}\right. \\ \left. - \frac{m}{\xi}\right] W = q_1 (\xi) \end{aligned}\right\} \quad (46).$$

Wir gehen zur Integration dieser Gleichung über und beschränken uns dabei auf den Fall des Verschwindens der Störungsfunktion, d. h. wir setzen $q_1 (\xi) = 0$. Diese Annahme treffen wir aus denselben Gründen wie bei der spärischen Schale.

Wir befassen uns zuerst mit den zwei folgenden speziellen Fällen:

1. Die Stärke der Schale ist konstant, dann ist in der Gl. (44) $c_1 = 0$, und folglich
$$2h = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47),$$
2. Die Stärke der Schale ist der Koordinate ξ direkt proportional, $c = 0$, und folglich
$$2h = c_1 \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47').$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (47) erhält die Gl. (46) die Form:

$$\xi \frac{d^2 W}{d \xi^2} + (1 + \sigma_1 - m\,\sigma_2) \frac{d W}{d \xi} + \left(\pm\, i \frac{\sqrt{3\, m\, (1 - \sigma_1\, \sigma_2)}}{h \operatorname{tg} \beta} - \frac{m}{\xi}\right) W = 0 \quad . \quad . \quad (48).$$

Wir führen[1]) eine neue Veränderliche

$$\eta = (1 \pm i) \sqrt{\frac{2 \sqrt{3\, m\, (1 - \sigma_1\, \sigma_2)}}{h \operatorname{tg} \beta}\, \xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

ein und finden:

$$\frac{d^2 W}{d \eta^2} + \frac{1 + 2\,\sigma_1 - 2\, m\, \sigma_2}{\eta} \frac{d W}{d \eta} + \left(1 - \frac{4\, m}{\eta^2}\right) W = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Wir formen diese Gleichung durch die Substitution[2])

$$W = \eta^{(m \sigma_2 - \sigma_1)}\, W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

um, und bekommen endgültig

$$\frac{d^2 W_1}{d \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d W_1}{d \eta} + \left(1 - \frac{p^2}{\eta^2}\right) W_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52),$$

wo

$$p^2 = 4\, m + (\sigma_1 - m\, \sigma_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53).$$

Die Gl. (52) stellt bekanntlich die Kanonform der Gleichung der zylindrischen Funktionen dar, und wir kommen somit zum Ergebnis, daß mittels dieser Funktionen die Berechnung einer anisotropen, konischen Schale von konstanter Stärke geschehen kann.

Wir bemerken noch, daß für den Fall isotropen Schalen ($m = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2$) die Umformung (51) ausfällt, da dann die Gl. (50) bereits die Kanonform der zylindrischen Funktion hat. Falls $p^2 = (n + {}^1/_2)^2$, wo n eine ganze Zahl ist, drückt sich das Integral der Gl. (52), wie bekannt[3]), durch algebraische und trigonometrische Funktionen aus, was die Berechnung noch weiter vereinfacht. Z. B. wenn:

---

[1]) Siehe Drang und Zwang Bd. II, S. 49.
[2]) Siehe Handbuch der Theorie der Zylinderfunktion. N. Nielsen. Leipzig 1904 S. 130.
[3]) Siehe »Die Theorie der Besselschen Funktionen« P. Schafheitlin. Berlin 1908, S. 27.

$$\left.\begin{aligned} 4\,\mathbf{m} + (\sigma_1 - m\,\sigma_2)^2 &= \frac{1}{4}, \quad W_1 = \frac{C_1 \sin\eta + C_2 \cos\eta}{\sqrt{\eta}}, \\ 4\,m + (\sigma_1 - m\,\sigma_2)^2 &= 2\,\frac{1}{4}, \quad W_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\left[C_1\left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta\right) + C_2\left(\sin\eta + \frac{\cos\eta}{\eta}\right)\right], \\ 4\,m + (\sigma_1 - m\,\sigma_2)^2 &= 6\,\frac{1}{4}, \quad W_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\left\{C_1\left[\left(\frac{3}{\eta^2} - 1\right)\sin\eta - \frac{3}{\eta}\cos\eta\right]\right. \\ &\qquad \left. + C_2\left[\frac{3}{\eta}\sin\eta + \left(\frac{3}{\eta^2} - 1\right)\cos\eta\right]\right\} \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \quad (54).$$

Im Falle einer konischen Schale, deren Stärke aus der Gl. (47′) sich ermittelt, hat die Gl. (46) ohne Störungsfunktion die Form:

$$\xi\frac{d^2 W}{d\xi^2} + (\sigma_1 - m\,\sigma_2)\frac{d\,W}{d\,\xi} + \left(m(\sigma_2 - 1) + \frac{k_0}{c_1 \operatorname{tg}\beta}\sqrt{\frac{12\,(1 - \sigma_1\sigma_2)}{m}}\right)\frac{W}{\xi} = 0 \qquad (55)$$

diese Gleichung läßt sich ohne weiteres integrieren. Um die Gl. (46) ohne Störungsfunktion im allgemeinen Falle zu integrieren, führen wir anstatt W eine neue Veränderliche nach der Formel

$$W = \xi^\mu W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

ein und erhalten somit:

$$\xi^{\mu+2}(c + c_1\,\xi)\frac{d^2 W_1}{d^2\xi} + \xi^{\mu+1}(A + B\,\xi)\frac{d\,W_1}{d\,\xi} + \xi^\mu(C + D\,\xi)\,W_1 = 0 \quad . \quad (57),$$

wo A, B, C und D Konstante sind, die wir leicht ermitteln können.

Schreiben wir

$$C = c\,[\mu^2 + \mu\,(\sigma_1 - m\,\sigma_2) - m] = 0$$

und folglich

$$\mu = \frac{m\,\sigma_2 - \sigma_1 + \sqrt{(m\,\sigma_2 - \sigma_1)^2 + 4\,m}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

und kürzen die Gl. (57) durch $\xi^{\mu+1}$, so gelangen wir zu einer Gleichung der hypergeometrischen Reihe. Bei der ausführlicheren Untersuchung dieser Reihe verweilen wir nicht.

5. Bemerkungen über die Schalen mit veränderlichem Krümmungshalbmesser des Meridianschnittes. Wir untersuchen nur den Fall, wenn

$$\frac{R_1}{R_2} = K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59),$$

wo K eine Konstante ist.

Die Gl. (26) ist, wie man sich leicht überzeugt, befriedigt durch:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_{20}\,(\sin\alpha)^{2K(\sigma_1 + m\,\sigma_2)\varepsilon} \\ D_1 &= D_{10}\,(\sin\alpha)^{2K(\sigma_1 + m\,\sigma_2)(1-\varepsilon)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60),$$

wo α_{20} und D_{20} Konstanten sind. Damit diese Gleichungen mit den Gleichungen (4′) verträglich sind, muß

$$1 - \varepsilon = 3\,\varepsilon \qquad \text{oder} \qquad \varepsilon = {}^1/_4$$

sein. Ist die Schale isotrop, so ist $\sigma_1 + m\,\sigma_2 = 2\,\sigma$ und somit

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_{20}\,(\sin\alpha)^{K\sigma} \\ D_1 &= D_{10}\,(\sin\alpha)^{3K\sigma} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60').$$

Die Berechnung der Schalen, deren Form und Querschnitt durch die Gleichungen (59) und (60) oder (60′) bestimmt sind, kommt auf die Integration der Gl. (18) mit entsprechenden Werten ihrer Koeffizienten hinaus.

Unter diesen Schalen haben wir zwei Klassen gefunden, für welche die Gl. (18) ohne Störungsfunktion mittelst der hypergeometrischen Funktionen integrierbar ist. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall der isotropen Schalen. Da in diesem Falle auf Grund der Gl. (19) $k = k_0\sqrt{D_1\,\alpha_2}$ und außerdem [1]) $R_1 = K\,(\sin\alpha)^{K-1}$ ist, so erscheint nach der Umformung die Gl. (18) ohne die Störungsfunktion in der Form:

[1]) Diese Formel findet sich bei Meißner, Vierteljahresschr. d. N. F. Ges. Zürich 1915. Wir verweilen nicht bei deren Ableitung, die zu der Differentialgeometrie gehört, da man sie einfach erhält, wenn man zuerst aus der Bedingung $\frac{R_1}{R_2} = K$ eine entsprechende Fläschenschar und dann R_1 bestimmt.

$$W'' + (1 - K\sigma)\operatorname{ctg}\alpha\, W' + [\sigma - K(1-\sigma^2)\operatorname{ctg}^2\alpha + \bar{K}_0 (\sin\alpha)^{K(1-\sigma)-1}]\, W = 0\,, \quad \bar{K}_0 = k_0 K \sqrt{\frac{a_{20}}{D_{10}}} \qquad (61).$$

wo

Das letzte Glied des Koeffizienten bei W wird zu einer Konstanten im Falle

$$K = \frac{1}{1-\sigma} \qquad (62)$$

und zu $\frac{\bar{K}_0}{\sin^2\alpha} = \bar{K}_0 (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)$, im Falle

$$K = -\frac{1}{1-\sigma} \qquad (62').$$

In diesen beiden Fällen unterscheidet sich unsere Differentialgleichung von der Gl. (30') nur durch die Werte der Konstanten und ist ebenso wie die Gl. (30') auf die Kanonform der Gleichung der hypergeometrischen Reihe zurückzuführen. Die Gleichungen der Mittelflächen der Schalen, die den Werten (62) und (62') entsprechen, haben die Form

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{1-\sigma} \qquad (63) \quad \text{und} \quad \frac{R_1}{R_2} = -\frac{1}{1-\sigma} \qquad (63').$$

Dieselben Werte von K sind auch in die Gl. (60'), welche die Stärke der Schale charakterisieren, einzuführen. Im Falle $\sigma = 0$ wird die Schalenstärke konstant, die Fläche (63) wird zu einer Sphäre.

Die Fläche (63'), deren Gleichung die Form $R_1 = -R_2$ erhält, trifft man öfters in den Untersuchungen über die Statik der Schalen [1]).

6. Zylindrische Schalen. Es ist einfach von den Gl. (37) und (38) der Kegelschale, zu den entsprechenden Gleichungen für die Zylinderschale überzugehen, indem man diese als eine Kegelschale mit einer unendlich entfernten Spitze betrachtet.

Bezeichnet man durch R den Halbmesser ihrer Mittelfläche, durch x den Abstand vom oberen Rande der Schale, so ist sofort ersichtlich [2]), daß

$$d\xi = dx,\ \beta = 0,\ \xi = \infty,\ \xi \operatorname{tg}\beta = R \qquad (64)$$

sind, und die Gl. (37) und (38) gehen mittels der Gl. (8) in

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{1}{D_1}\frac{dD_1}{dx}\frac{d\Theta}{dx} + \frac{N}{D_1} = 0, \quad \frac{d^2N}{dx^2} - \frac{1}{a_2}\frac{da_2}{dx}\frac{dN}{dx} - \frac{a_2\Theta}{R^2} = q_2(x) \qquad (65)$$

über, wo

$$q_2(x) = a_2 \frac{d}{dx}\left[\frac{\sigma_2}{R\,a_1}\int X\,dx - \frac{Z}{a_2}\right] \qquad (66).$$

Die Gl. (66) vereinfacht sich insbesondere im Falle $X = 0$ (unter der Wirkung einer zur Schale senkrechten Belastung), und zwar zu

$$q_2(X) = -\frac{dZ}{dx} + \frac{1}{a_2}\frac{da_2}{dx} Z \qquad (66').$$

Wir benutzen die Gl. (64) und die Uebergangsformeln des (§ 4) und ermitteln aus den Gl. (2), (3') und der letzten der Gl. (1):

$$e_1 = \frac{du}{dx}, \quad e_2 = -\frac{w}{R}, \quad \Theta = \frac{dw}{dx}, \quad N = \frac{dG_1}{dx}, \quad T_1 = \frac{a_1}{1-\sigma_1\sigma_2}\left(\frac{du}{dx} - \sigma_1\frac{w}{R}\right)$$
$$T_2 = \frac{a_2}{1-\sigma_1\sigma_2}\left(-\frac{w}{R} + \sigma_2\frac{du}{dx}\right), \quad G_1 = -D_1\frac{d^2w}{dx^2}, \quad G_2 = -D_2\sigma_2\frac{d^2w}{dx^2} \qquad (67).$$

Ist bei einer Untersuchung $T_1 = 0$, so folgt

$$T_2 = -\frac{a_2 w}{R} \qquad (67').$$

Durch Einführung der Werte N und Θ aus den Gl. (67) in die Gl. (65) finden wir nach einigen Umformungen:

$$G_1 = -D_1\frac{d^2w}{dx^2}, \quad \frac{d^2G_1}{dx^2} - \frac{a_2 w}{R^2} = -\bar{q}_2(x) \qquad (68),$$

---

[1]) Die Darstellung dieser Fläche und einige ihrer statischen Eigenschaften findet man z. B. in der Arbeit von A. Francke, Zeitschr. f. Math. u. Physik, 1914, S. 173.

[2]) Da wir die Gleichungen für die Kegelschale bereits abgeleitet haben, so ergibt sich der Uebergang zu den Gl (65) — (69) sehr einfach, aber im allgemeinen wäre es richtiger, diese Gleichungen direkt durch Untersuchung der mechanischen Eigenschaften der zylindrischen Schale abzuleiten.

wo
$$\overline{q_2}(x) = Z - \frac{\sigma_2 a_2}{R a_1}\int N\,dx.$$

Nach der Elimination der Funktion G_1 aus diesen Gleichungen finden wir

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D_1\frac{d^2w}{dx^2}\right) + \frac{a_2 w}{R^2} = \overline{q_2}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69).$$

Diese Gleichung findet sich bei der Untersuchung von vielen Aufgaben der Festigkeitslehre z. B. in der Theorie der Transversalschwingungen der Stäbe mit veränderlichem Querschnitt[1]) sowie bei der Berechnung der Balken mit veränderlichem Querschnit auf einer elastischen Unterlage u. a.

Zur Berechnung einer Zylinderschale muß man entweder die Gl. (69) oder das System der Gl. (68) oder, endlich das System der Gl. (65), das man übrigens aus den Gleichungen des Systems (68) durch einfache Differentiation ableiten könnte, integrieren.

Die umfassendsten Ergebnisse erhalten wir, wenn wir vom System der Gl. (65) ausgehen. Wir wenden auf dieses System die Umformung des § 2 an.

In diesem Falle haben wir die Annahme zu treffen

$$p = 1, \quad q = \frac{1}{D_1}\frac{dD_1}{dx}, \quad r = 0, \quad s = \frac{1}{D}, \quad q_1 = -\frac{1}{a_2}\frac{da_2}{dx}, \quad r_1 = 0, \quad s_1 = -\frac{a_2}{R^2}.$$

Die zweite der Gl. (21) wird zu einer Identität. Somit sind alle weiteren Ableitungen unabhängig von der Gl. (25), die vorher die Werte von a_2 und D_1 beschränkte.

Die erste der Gl. (21) bekommt folgende Form:

$$\sqrt{\frac{D_1}{a_2}}\left\{\frac{d^2 \lg D_1 a_2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\lg\sqrt{\frac{D_1}{a_2}}\frac{d\lg D_1 a_2}{dx}\right\} = \text{Konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70).$$

Wir führen die Bezeichnung ein:

$$\sqrt{\frac{D_1}{a_2}} = \psi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71),$$

integrieren die Gl. (70) in derselben Weise wie die Gl. (39'), und finden:

$$a_2 = a_{20}\frac{1}{\psi(x)}e^{\int\frac{Cx+C_1}{\psi(x)}dx}, \quad D_1 = D_{10}\psi(x)e^{\int\frac{Cx+C_1}{\psi(x)}dx} \quad . \quad . \quad . \quad (72),$$

wo a_{20}, D_{10}, C und C_1 willkürliche Konstanten, und $\psi(x)$ eine willkürliche Funktion.

Die Gl. (19), (20) und (18) werden in dem zu untersuchenden Falle zu:

$$k = k_0\sqrt{D_1 a_2} = k_0\sqrt{D_{10}a_{20}}\,e^{\int\frac{Cx+C_1}{\psi(x)}dx}, \quad k_0^2 + C\sqrt{\frac{D_{10}}{a_{20}}}k_0 + \frac{1}{R^2} = 0 \quad (73),$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{1}{a_2}\frac{da_2}{dx}\frac{dW}{dx} + k_0\sqrt{\frac{a_2}{D_1}}W = q_2(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

oder
$$\psi(x)\frac{d^2W}{dx^2} + \left[\psi'(x) - Cx - C_1\right]\frac{dW}{dx} + k_0\sqrt{\frac{a_{20}}{D_{10}}}W = \psi(x)q_2(x) \quad . \quad . \quad (74').$$

Im folgenden verweilen wir bei den Fällen, wo die Wurzeln der 2. der Gl. (73) voneinander verschieden sind und untersuchen die Gl. (74') ohne die Störungsfunktion, da in dem praktisch wichtigsten Falle, wo $\psi(x)$ und $q_2(x)$ algebraische Polynome sind, die Ermittelung eines partiellen Integrals auf ganz elementarem Wege geschieht.

Indem wir spezielle Annahmen bezüglich der Funktion $\psi(x)$ treffen, finden wir eine Reihe von Lösungen, die für verschiedene Fragen der Baustatik von Nutzen sein können. Untersuchen wir einige von diesen:

1) $\psi(x) = (x-a)(x-b)$; $a \neq b$; $C = m+n+2$; $C_1 = -a(n+1) - b(m+1)$ (75),

wo a, b, m und n willkürliche Konstante sind. Aus den Gl. (72) folgt:

$$a_2 = a_{20}(x-a)^m(x-b)^n; \quad D_1 = D_{10}(x-a)^{m+2}(x-b)^{n+2} \quad . \quad . \quad . \quad (76).$$

Die Gl. (74') ohne Störungsfunktion wird zu:

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2W}{dx^2} - [(m+n)x - na - mb]\frac{dW}{dx} + k_0\sqrt{\frac{a_{20}}{D_{10}}}W = 0 \quad . \quad . \quad (77)$$

und ist folglich in hypergeometrischen Funktionen integrierbar.

2) $\psi(x) = (x-a); \quad Cx + C_1 = m(x-a) + n + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78),$

$$a_2 = a_{20}e^{mx}(x-a)^n; \quad D_1 = D_{10}e^{mx}(x-a)^{n+2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79).$$

[1]) Siehe die früher zitierten Arbeiten von Kirchhoff, Ward und Mononobe.

Die Gl. (74') hat die Form:

$$(x-a)\frac{d^2W}{dx^2} - [n + m(x-a)]\frac{dW}{dx} + k_0\sqrt{\frac{a_{20}}{D_{10}}}\,W = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80).$$

Diese Gleichung kann man als einen Grenzfall der Gaußschen Gleichung betrachten, wenn einer der singulären Punkte ins Unendliche rückt.

Im Falle $m = 0$ [1]) ist diese Gleichung mittelst zylindrischer Funktionen integrierbar [2]).

$$3) \quad \psi(x) = 1,\ a_2 = a_{20}\,e^{\frac{Cx^2}{2} + C_1 x},\ D_1 = D_{10}\,e^{\frac{Cx^2}{2} + C_1 x} \quad . \quad . \quad . \quad (81).$$

Die Gl. (74') wird zu: $$\frac{d^2W}{dx^2} - (Cx + C_1)\frac{dW}{dx} + k_0\sqrt{\frac{a_{20}}{D_{10}}}\,W = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82).$$

Diese Gleichung entspricht demjenigen Fall einer hypergeometrischen Gleichung, bei welchem die beiden singulären Stellen ins Unendliche rücken [3]). Falls $C = 0$, ist die Integration dieser Gleichung elementar.

$$\left.\begin{aligned} 4) \quad & \psi(x) = (x-a)^2;\ Cx + C_1 = (m+2)(x-a) - n \\ & a_2 = a_{20}\,e^{\frac{n}{x-a}}(x-a)^m;\ D_1 = D_{10}\,e^{\frac{n}{x-a}}(x-a)^{m+4} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (83).$$

Die Gl. (74') wird zu:

$$(x-a)^2\frac{d^2W}{dx^2} - [m(x-a) - n]\frac{dW}{dx} + k_0\sqrt{\frac{a_{20}}{D_{10}}}\,W = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84).$$

Im Falle $n = 0$ integriert sich diese Gleichung auf elementare Weise.

Im Falle $n \neq 0$ führen wir eine neue Veränderliche z gemäß $x = a + \frac{1}{z}$ und eine neue Funktion W_1 gemäß $W = z^\mu W_1$, wo μ der Gleichung

$$\mu^2 + (1+m)\mu + k_0\sqrt{\frac{a_{20}}{D_{10}}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

entspricht, ein und erhalten eine Gleichung von derselben Art wie die Gl. (80) und zwar:

$$z\frac{d^2W_1}{dz^2} + [2 + 2\mu + m - nz]\frac{dW_1}{dz} - \mu n W_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86).$$

Untersuchen wir die Lösungen, die für a_2 und D_1 Funktionen ergeben, die den Bedingungen (4') entsprechen.

Aus der Gl. (71) folgt, daß die Stärke der Schale $2h$ für die Funktion $\psi(x)$ sich nur durch einen konstanten Faktor g unterscheiden kann, so daß $2h = g\psi(x)$. Im Falle 1) erhalten wir aus der Gl. (76):

$$2h = gx^2 + ex + d, \qquad a_2 = E_2(gx^2 + ex + d), \qquad D_1 = \frac{E_1(gx^2 + ex + d)^3}{12(1 - \sigma_1\sigma_2)} \quad (87),$$

wo e und d Konstanten sind.

Somit haben wir bewiesen, daß die Berechnung einer anisotropen, zylindrischen Schale, deren Wandstärke nach einer Parabel sich verändert, mittels hypergeometrischer Funktionen geschehen kann.

Der Fall 2) führt bei Berücksichtigung der Gl. (79) zum folgenden Ergebnis [4]):

$$2h = gx + e, \qquad a_2 = E_2(gx + e), \qquad D_1 = \frac{E_1(gx + e)^3}{12(1 - \sigma_1\sigma_2)} \quad . \quad . \quad . \quad (88).$$

Im Falle 4) finden wir indem wir die Gl. (83) mit benutzen:

$$2h = g(x-a)^2, \qquad a_2 = E_2 g(x-a)^2, \qquad D_1 = \frac{E_1 g^3(x-a)^6}{12(1 - \sigma_1\sigma_2)} \quad . \quad (89).$$

Dieser Fall ist besonders wichtig wegen der elementaren Lösung, die ihm entspricht.

---

[1]) Dieser Fall wurde von Kirchhoff und Ward ausführlich behandelt. Die Gl. (72) und (74') kann man als eine Verallgemeinerung der Kirchhoffschen Untersuchungen betrachten. Auch die anderen Untersuchungen, die Kirchhoff in der zitierten Arbeit eingeführt hat und die sich auf die Ermittelung der Schwingungsperiode der Eigenschwingungen eines Stabes vom veränderlichen Querschnitt beziehen, lassen sich verallgemeinern für den Fall, daß a_2 und D_1 durch die Gl. (72) bestimmt sind.

[2]) Siehe Handbuch d. Theorie der Zylinderfunktionen N. Nielsen, Leipsig 1904, S. 130.

[3]) Die Reihen, die diese Gleichung befriedigen, sind im »Lehrbuch der Differential-Gleichungen Forsyth-Jacobsthal« 1912, S. 207 und 741 angegeben.

[4]) Vergl. die zitierten Arbeiten von Reißner und Meißner, a. a. O.

7. Die unhomogenen Schalen. Bis jetzt haben wir die Berechnung der elastischen, anisotropen Schalen nach einer Methode durchgeführt, die sich auf den Gedanken Meißners stützte, der die Zurückführung der Integration eines Systems von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Parameter, der zwei verschiedene Werte annehmen kann, anstrebte. Diese Methode bietet viele Vorteile, besonders durch die Vereinfachung der Berechnung, aber ihre Andwendbarkeit ist an gewisse, beschränkende Bedingungen geknüpft; diese Bedingungen drücken sich bei unserer Art der Darstellung in der Gl. (23) für den allgemeinen Fall der symmetrischen Schale, bzw. der Gl. (39) für die konischen Schalen aus. Die ersten Gleichungen der Systeme (23) bzw. (39) werden nur dann identisch befriedigt, wenn die Gleichung (25), die aus der Gl. (4′) folgt, erfüllt wird. Es kann aber vorkommen, daß wir bei der Berechnung der Schalen auf die Gl. (4′) verzichten müssen, während die anderen Gleichungen (1), (2) und (3′) ihre Geltung behalten. Dieser Fall tritt z. B. bei Eisenbetonschalen, für die die Berechnung des Trägheitsmomentes und der reduzierten Flächen der Querschnitte nach besonderen Formeln geschieht, so daß die Koeffizienten α_1, α_2, D_1, D_2 nach der Gl. (4′) nicht berechnet werden können[1]), ein. Dieselben Eigentümlichkeiten werden wir bei der Berechnung der Schalen aus Wellblech und auch der Schalen, die mit einem dichten Netz von Rippen versehen sind usw. treffen. Es kann vorkommen, daß obwohl die Bedingungen (4′) nicht erfüllt sind, die Gl. (25) doch wenigstens annähernd, befriedigt ist, es ist aber notwendig die allgemeine Untersuchung der Integration des Systems der Differentialgleichungen (7) und (13) und auch (37) unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten dieser Gleichungen keinerlei beschränkenden Bedingungen unterworfen sind, durchzuführen. In diesem Falle kommt in erster Linie die Methode der asymptotischen Integration in Frage, auf deren Anwendung zur Berechnung der Schalen zum ersten Male H. Reißner hingewiesen hat, und die O. Blumenthal[2]) entwickelte und begründete.

Wir betrachten zuerst die sphärische Schale konstanter Stärke. Setzen wir in Gl. (7) und (13) $R_1 = R_2 = R$, wo R eine konstante Größe ist, berücksichtigen wir, daß auch α_1, α_2, D_1 und D_2 konstante Größen sind, und führen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = m_1 , \qquad \frac{D_2}{D_1} = m_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

ein, so finden wir, daß diese Gleichungen, wenn wir wie früher die Störungsfunktion weglassen, die Form annehmen

$$\Theta'' + (1 + \sigma_1 - m_2\,\sigma_2)\operatorname{ctg}\alpha\,\Theta' - (\sigma_1 + m_2\operatorname{ctg}^2\alpha)\,\Theta + \frac{N R^2}{D_1} = 0.$$

$$N'' + (1 + \sigma_1 - m_1\,\sigma_2)\operatorname{ctg}\alpha\,N' + m_1\,(\sigma_2 - \operatorname{ctg}^2\alpha)\,N - \Theta\,\alpha_2 = 0.$$

Mittels der zweiten Gleichung bestimmen wir Θ, Θ' und Θ'' und eliminieren danach diese Werte aus der ersten Gleichung, dann finden wir

$$\left.\begin{aligned} N'''' + A_0 \operatorname{ctg}\alpha\, N''' + (A_1{}^0 + A_1{}^1 \operatorname{ctg}^2\alpha)\, N'' + (A_2{}^0 \operatorname{ctg}\alpha + A_2{}^1 \operatorname{ctg}^3\alpha)\, N' + (A_3{}^0 \\ + A_3{}^1 \operatorname{ctg}^2\alpha + A_3{}^2 \operatorname{ctg}^4\alpha)\, N + \frac{N R^2\,\alpha_2}{D_1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (91),$$

wo A_0, $A_1{}^0 \ldots A_3{}^2$ konstante Größen sind, die folgendermaßen gegeben sind.

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= 2\,(1+\sigma_1) - \sigma_2\,(m_1 + m_2), & A_1{}^0 &= -\,(2 + 3\,\sigma_1 - 3\,m_1\,\sigma_2) \\ A_1{}^1 &= -\,1 + \sigma_1{}^2 - m_1\,(1 - \sigma_2 + \sigma_1\,\sigma_2) - m_2\,(1 + \sigma_2 + \sigma_1\,\sigma_2) + m_1\,m_2\,\sigma_2{}^2 \\ A_2{}^0 &= (1+\sigma_1)\,(1 - 2\,\sigma_1) + m_1\,(4 + 3\,\sigma_1\,\sigma_2) + m_2\,\sigma_2\,(1+\sigma_1) - 2\,m_1\,m_2\,\sigma_2{}^2 \\ A_2{}^1 &= 1 - \sigma_1{}^2 + m_1\,(3 - \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_1\,\sigma_2) - m_2\,(1+\sigma_1)\,(1-\sigma_2) + m_1\,m_2\,\sigma_2\,(2 - \sigma_2) \\ A_3{}^0 &= -\,m_1\,(2 + \sigma_1\,\sigma_2), & A_3{}^1 &= -\,3\,m_1\,(2 - \sigma_1 + m_2\,\sigma_2), \\ A_2{}^3 &= m_1\,[-\,4 + 2\,\sigma_1 + m_2\,(1 - 2\,\sigma_2)] \end{aligned}\right\} \quad (92).$$

Um auf Gleichung (91) die Methode der asymptotischen Integration anzuwenden, müssen wir N durch eine neue Funktion M so ersetzen, daß das Glied mit der dritten Ableitung aus der Gleichung ausfällt. In unserem Falle müssen wir einsetzen:

$$N = (\sin\alpha)^{-A_0/4}\,M = (\sin\alpha)^{-\frac{2(1+\sigma_1) - \sigma_2(m_1 + m_2)}{4}}\,M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

[1]) Ausführliche Behandlung der Frage und viele Formeln sind im Aufsatze von H. Huber. Bauingenieur 1923 S. 354 zu finden.

[2]) Siehe die schon genannte Arbeit.

und die Gl. (91) nimmt die Form

$$M^{IV} + a_0 M'' + a_1 M' + a_2 M + b^4 M = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

an, wo a_0, a_1 und a_2 Polynome von ctg α, deren Ausdruck wir hier nicht angeben, sind und

$$b^4 = \frac{R^2 a_2}{D_1} \qquad \text{ist} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95).$$

Falls die Stärke der Schale klein im Verhältnis zum Halbmesser ist, (der gewöhnlich vorkommende Fall) und folglich b^4 eine sehr bedeutende Größe im Vergleich zu den Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 ist, so läßt sich nach dem Vorschlage von H Reißner und O. Blumenthal die Methode der asymptotischen Integration anwenden, die darin besteht, daß man in der Gl. (94) die Glieder $a_0 M'' + a_0 M' + a_2 M$ vernachlässigt und die Gleichung

$$M^{IV} + b^4 M = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94')$$

integriert. Die auf diesem Wege erhaltene Funktion nimmt man als die erste Annäherung an. Genügt diese Annäherung nicht, so kann man zweite, dritte usw. Annäherungen ermitteln. Wir halten es nicht für notwendig, die ausführliche Rechnungsweise anzugeben, da sie in der oben erwähnten Arbeit von O. Blumenthal durchgeführt ist; wir wollen nur darauf hinweisen, daß wir beim Vergleich der Gl. (94) mit der Gl. (B) auf S. 346 der Arbeit von Blumenthal, unter Berücksichtigung seiner weiteren Ableitungen, zum Schlusse kommen, daß alle Ergebnisse, die von ihm für die Lösung der Aufgabe des Gleichgewichtes einer elastischen isotropen sphärischen Schale gefunden sind, auch für den Fall der anisotropen Schalen verallgemeinert werden können. Der Unterschied wird nur in der Größe der Koeffizienten und der Grenze der Genauigkeit liegen. Wir geben hier die erste Annäherung an[1]). Zu diesem Zwecke integrieren wir die Gl. (94'), substituieren das Integral in die Gl. (93) und erhalten:

$$N = (\sin\alpha)^{-\frac{2(1+\sigma_1)-\sigma_2(m_1+m_2)}{4}} \left\{ e^{\frac{b}{\sqrt{2}}\alpha}\left(C_1 \cos\frac{b}{\sqrt{2}}\alpha + C_2 \sin\frac{b}{\sqrt{2}}\alpha\right) + e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}\alpha}\left(C_3 \cos\frac{b}{\sqrt{2}}\alpha + C_4 \sin\frac{b}{\sqrt{2}}\alpha\right)\right\} \quad . \quad (96)$$

und für den Fall der geschlossenen Schalen[2])

$$N = (\sin\alpha)^{-\frac{2(1+\sigma_1)-\sigma_2(m_1+m_2)}{4}} e^{\frac{b}{\sqrt{2}}\alpha}\left(C_1 \cos\frac{b}{\sqrt{2}}\alpha + C_2 \sin\frac{b}{\sqrt{2}}\alpha\right) \quad . \quad (96'),$$

wo die willkürlichen Konstanten $C_1 \ldots C_4$ durch die Randbedingungen der Schale bestimmt sind. Im Falle der isotropen Schalen, d. h. wenn $m_1 = m_2 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2$, kommen wir zur Lösung von H. Reißner und O. Blumenthal. Wir bemerken noch, daß in vielen praktisch wichtigen Fällen die folgende angenäherte Gleichung gilt:

$$2(1+\sigma_1) - \sigma_2(m_1+m_2) \simeq 2\,,$$

Man kann diese Gleichung z. B. bei der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen anwenden. Wir wollen uns mit der Anwendung der Methode der asymptotischen Integration auf andere Arten der Schale, insbesondere auf konische Schalen, hier nicht befassen, da wir dieses in einer anderen Arbeit, die in der nächsten Zeit folgen soll, ausführlicher zu untersuchen beabsichtigen, und hier nur noch eine elementare Lösung für den Fall der konischen Schale andeuten.

Wir machen die Annahme, daß die Größen α_1, α_2, D_1 und D_2 Potenzfunktionen der Koordinate ξ und durch folgende Gleichung gegeben sind:

$$\alpha_1 = \alpha_{10}\,\xi^l, \quad \alpha_2 = \alpha_{20}\,\xi^l, \quad D_1 = D_{10}\,\xi^t, \quad D_2 = D_{20}\,\xi^t \quad . \quad . \quad . \quad (97),$$

wo D_{10}, D_{20}, α_{10}, α_{20} konstante Größen sind.

[1]) Diese Annäherung klärt in vielen Fällen die Frage der Verteilung der Spannungen ganz genügend. Für den Fall der isotropen Schalen ist ein bemerkenswertes Zahlenbeispiel im Aufsatze von Prof. S. Timoschenko (Nachrichten der Technologen-Gesellschaft) Petersburg 1913 zu finden.

[2]) Vom physikalischen Standpunkte aus betrachtet ist es klar, daß die Spannung N vom Rand zur Spitze der Schale also mit der Abnahme des Winkels α schnell abnehmen muß, deshalb $C_3 = C_4 = 0$. Mathematische Begründung ist in der mehrfach erwähnten Arbeit von O. Blumenthal zu finden.

Die Gl. (37), die wir wie früher ohne Störungsfunktion untersuchen, werden bei dieser Annahme und mit den abgekürzten Bezeichnungen (90) die Form haben:

$$\left.\begin{aligned} \xi\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}+[1+\sigma_1-m_2\sigma_2+t]\frac{d\Theta}{d\xi}+(\sigma_1 t-m_2)\frac{\Theta}{\xi}+\frac{V\xi^{-t}}{D_{10}\operatorname{tg}\beta}=0\\ \xi\frac{d^2V}{d\xi^2}+[1+\sigma_1-m_1\sigma_2-l]\frac{dV}{d\xi}+m_1(\sigma_2 l-1)\frac{V}{\xi}-\frac{a_{10}\Theta\xi^l}{\operatorname{tg}\beta}=0\end{aligned}\right\} \quad (98).$$

Abgekürzt schreiben wir dieses System der Gleichungen wie folgt:

$$\xi\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}+a_1\frac{d\Theta}{d\xi}+b_1\frac{\Theta}{\xi}+c_1 V\xi^{-t}=0\,,\qquad \xi\frac{d^2V}{d\xi^2}+a_2\frac{dV}{d\xi}+b_2\frac{V}{\xi}+c_2\Theta\xi^l=0 \quad (98'),$$

wo die konstanten Koeffizienten a, b, c durch den Vergleich mit der Gleichung (98) leicht zu bestimmen sind. Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen das System der Differentialgleichungen (98') Integrale von der Form

$$\Theta=\Theta_0\xi^p\,,\qquad V=V_0\xi^q \quad (99)$$

hat, wo Θ_0, V_0, p und q konstante Größen sind. Durch Einführung dieser Werte Θ und V in die Gl. (98') finden wir

$$\left.\begin{aligned} \Theta_0[p^2+(a_1-1)p+b_1]\xi^{p-1}+c_1 V_0\xi^{q-t}=0\\ V_0[q^2+(a_2-1)q+b_2]\xi^{q-1}+c_2\Theta_0\xi^{p+l}=0\end{aligned}\right\} \quad (100).$$

Damit diese Gleichungen identisch befriedigt sind, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$p-1=q-t,\qquad q-1=p+l,$$

und folglich

$$t=l+2 \quad (101),\qquad q=p+l+1 \quad (102),$$

$$\begin{vmatrix} p^2+(a_1-1)p+b_1 & c_1\\ c_2 & q^2+(a_2-1)q+b_2\end{vmatrix}=0 \quad (103).$$

Die Gl. (101) ergibt die beschränkenden Bedingungen, die den Größen a_1, a_2, D_1 und D_2 auferlegt werden müssen, damit das System der Gleichungen (98') Integrale von der Form (99) zulasse. Ist die Gl. (101) befriedigt, so finden wir aus dem System der Gl. (102) und (103) im allgemeinen die entsprechenden Größen für p und q und hiernach aus der Gl (100) das Verhältnis zwischen den willkürlichen Konstanten Θ_0 und V_0. Da wir im allgemeinen Fall aus dem System der Gl. (102) und (103) vier Systeme für Werte von p und q finden werden, so erhalten wir vier spezielle Lösungen und folglich auch die allgemeine Lösung des Systems der Differentialgleichungen (98').

Die einzelnen speziellen Fälle, die bei der Lösung des Systems der Gleichungen (102) und (103) möglich sind, sind leicht zu untersuchen. Auf diese Weise kommen wir zu einer ganz elementaren Lösung einer der Aufgaben über das Gleichgewicht der konischen Schale. 413

Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern.

Von **CONSTANTIN WEBER** in Duisburg.

Für das in dieser Zeitschrift Band 4, Seite 361 u. f. im gleichnamigen Aufsatze von A. Timpe gebrachte Problem wird im folgenden eine andere allgemeine Lösungsform gebracht. Hierbei werden die Spannungen usw. von einer Umdrehungsfunktion $F(r,z)$ hergeleitet, ähnlich wie die Spannungen des ebenen Problemes von der Airyschen Spannungsfunktion abgeleitet werden. Hiermit erledigt sich auch die im obigen Aufsatze, Seite 363, Fußnote 1 aufgeworfene Frage.

Die Umdrehungsfunktion lautet:

$$F=\Phi_1+z\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\,,$$

wo $\Phi_1(r,z)$ und $\Phi_2(r,z)$ harmonische Funktionen sind. Für die Spannungen, die Raumdehnung und die Verschiebungen gelten (mit Bezeichnungen wie im obigen Aufsatze) die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} F, \quad \tau = -\frac{\partial^2}{\partial r\, \partial z} F,\\
&\sigma_r = -\frac{\partial^2}{\partial r^2}(F + 2\Phi_2) - \frac{1}{m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Phi_2, \quad \sigma_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(F + 2\Phi_2) - \frac{1}{m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi_2\\
&\Delta = \frac{2\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{E}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi_2 = \frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{E}\nabla F,\\
&u_r = -\frac{1+\frac{1}{m}}{E}\frac{\partial}{\partial r}\left[F + 2\left(1-\frac{1}{m}\right)\Phi_2\right], \quad u_z = -\frac{1+\frac{1}{m}}{E}\frac{\partial}{\partial z}\left[F - 2\left(1-\frac{1}{m}\right)\Phi_2\right]
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Aus jedem ebenen Spannungszustande mit den Koordinaten y, z, der sich in x-Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, läßt sich durch Drehung um die z-Achse und bei gleichmäßiger Verteilung des Spannungszustandes auf einen vollen Umfang ein Umdrehungs-Spannungszustand finden. Die Airysche Spannungsfunktion

$$f(y, z) = \varphi_1(y, z) + z\frac{\partial}{\partial z}\varphi_2(y, z),$$

worin φ_1 und φ_2 ebene harmonische Funktionen sind, geht hierbei in die Umdrehungsfunktion $F(r, z)$ über:

$$F = \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} f(r\cos\vartheta, z)\, d\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Funktionen $\Phi(r, z)$ erhält man nach derselben Integrationsformel aus den Funktionen $\varphi(y, z)$. Nicht jeder Umdrehungs-Spannungszustand kann jedoch in dieser Weise von einem ebenen hergeleitet werden.

Umgekehrt läßt sich aus jedem Umdrehungszustande, der infolge von im Endlichen befindlichen singulären Punkten entsteht, durch fortschreitende Ueberlagerung von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ bei einer Verteilung des gegebenen Zustandes auf die Längeneinheit in x Richtung ein ebener Zustand bilden. Zum Uebergange von der Umdrehungsfunktion zur Airyschen dient die Gleichung:

$$f(y, z) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} F(\sqrt{x^2+y^2}, z)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Hierzu ein Beispiel: Für den vom Nullpunkte im Raume sich allseitig ausbreitenden Druck ist:

$$F = \Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + C, \quad \Phi_2 = 0, \quad \sigma_z = \frac{r^2 - 2z^2}{\sqrt{r^2+z^2}^5}, \quad \tau = -\frac{3zr}{\sqrt{r^2+z^2}^5}, \quad \Delta = 0,$$

$$u_r = \frac{1+\frac{1}{m}}{E}\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}^3}, \quad u_z = \frac{1+\frac{1}{m}}{E}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}^3} \text{ usw.}$$

Nach Gl. (3) erhält man die Airysche Spannungsfunktion für einen in der Ebene vom Nullpunkt sich allseitig ausbreitenden Druck:

$$f(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C\right)dx = \left[\ln\frac{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}} + Cx\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

$$= \left[\ln\frac{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}\,(x+\sqrt{x^2+1})}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \left[\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - Cx\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}.$$

Um endliche Werte zu erhalten, ist für C ein unendlich kleiner Wert derart zu wählen, daß die zweite eckige Klammer für $x = +\infty$ und $-\infty$ gleich Null wird. Man erhält dann die bekannte Airysche Funktion $f = -\ln(y^2+z^2)$.

Der Umdrehungsfunktion

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

entspricht die Airysche Funktion

$$q = -\ln(y^2 + z^2) \quad \ldots \quad (4b).$$

Durch Differentieren nach z, das beliebig fortgesetzt werden kann, erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi = \frac{-z}{\sqrt{r^2+z^2}^3} \quad \ldots \quad (5a),$$

dem entspricht

$$\frac{\partial}{\partial z}q = \frac{-2z}{y^2+z^2} \quad \ldots \quad (5b).$$

Ebenso durch Integration bis auf nebensächliche Integrationskonstante:

$$\int \Phi\, dz = \ln(z + \sqrt{r^2+z^2}) \quad \ldots \quad (6a),$$

dem entspricht

$$\int q\, dz = 2y \operatorname{arctg}\frac{y}{z} - z\ln(y^2+z^2) + 2z \quad \ldots \quad (6b).$$

Auf Grund dieses Zusammenhanges lassen sich nach gewissen bekannten Lösungen des einen Gebietes die entsprechenden Lösungen des anderen Gebietes aufstellen. Beispielsweise lautet für die Halbebene $z > 0$, die im Nullpunkt durch die Zugkraft P belastet ist, die Airysche Spannungsfunktion:

$$f = \frac{P}{\pi}\left(y \operatorname{arctg}\frac{y}{z} + z\right) = \frac{P}{2\pi}\left[2y \operatorname{arctg}\frac{y}{z} - z\ln(y_2+z^2) + 2z\right] + z\frac{P}{2\pi}\ln(y^2+z^2) = q_1 + z\frac{\partial q_2}{\partial z}.$$

Die Umdrehungsfunktion für den Halbraum mit der Kraft P im Nullpunkt ergibt sich hieraus nach Gl. (4a) und (6a):

$$F = \frac{P}{2\pi}\left[\ln(z + \sqrt{r^2+z^2}) - \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right],$$

woraus nach Gl. 1 die Spannungen zu finden sind.

Es ist mir gelungen, das Scheibenproblem eines Streifens, der durch $z = \pm 1$ begrenzt und durch eine Einzelkraft P belastet ist, durch eine Reihe von Funktionen mit Unstetigkeitspunkten für $y = 0$ und $z = \ldots -3, -1, +1, +3 \ldots$ zu lösen und hiernach auch für die Platte mit einer Einzelkraft die Lösung in obiger Weise durch eine Funktion mit Unstetigkeitspunkten auf der z-Achse zu bilden. Die Veröffentlichung wird nach Erledigung einiger noch vorzunehmender numerischer Berechnungen erfolgen. 488

Über die Stabilität der beiderseits eingespannten Elastika und ähnliche Fragen.[1]

Von **PAUL FUNK** in Prag.

Eine Untersuchung der Stabilität der elastischen Linie auf Grund der Theorie der zweiten Variation findet sich zwar in der Dissertation von Born[2]), aber insbesondere für den Fall, wo die elastische Linie fest eingeklemmt ist, gelangt Born zu keinem übersichtlichem Ergebnis, wie er selbst ausdrücklich hervorhebt. Diese Lücke soll hier unter Heranziehung geometrischer Gesichtspunkte ausgefüllt werden.

Es sei ϑ der Winkel mit einer festen Achse und s die Bogenlänge, dann ist unser Ausgangspunkt das folgende Variationsproblem.

$$\int_{s_1}^{s_2} \vartheta'^2\, ds \to \text{Min.},$$

wobei die Größen

$$\vartheta(s_1) = \vartheta_1, \quad \vartheta(s_2) = \vartheta_2, \quad \int_{s_1}^{s_2}\cos\vartheta\, ds = x_2 - x_1, \quad \int_{s_1}^{s_2}\sin\vartheta\, ds = y_2 - y_1$$

vorgegeben sind. Die Extremale genügt der Gleichung

$$\vartheta'' + a\cos\vartheta + b\sin\vartheta = 0 \quad \ldots \quad (1).$$

[1]) Erweiterte Darstellung meines Vortrages bei der Innsbrucker Jahresversammlung.
[2]) Max Born. Diss.; Göttingen 1906.

Ohne Schädigung der Allgemeinheit kann man für die zu untersuchende Extremale annehmen $a = 0$, $b = 1$; es kommt das auf eine zweckmäßige Wahl der Achse und des Längenmaßstabes hinaus. Wir bezeichnen die Krümmung mit $\varkappa$ und den Krümmungsradius mit R, also: $\vartheta' = \varkappa = \frac{1}{R}$. Es ist somit

$$\vartheta'' = \varkappa' = -\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,\mathrm{a}),$$

hieraus ergibt sich durch Integrieren bzw. Differenzieren

$$^1/_2\,\vartheta'^2 = \cos\vartheta - \cos\beta, \quad \varkappa = -y, \quad \varkappa'' = -\cos\vartheta\,\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,\mathrm{b}),$$

wobei β den größten Winkel bezeichnet, den die Elastika mit der x-Achse einschließt.

Das Stabilitätskriterium auf Grund der zweiten Variation (Jacobisches Kriterium) verlangt — roh gesagt — zu untersuchen, ob eine den oben angegebenen Grenz- und isoperimetrischen Bedingungen genügende unendlich benachbarte Extremale möglich ist. Genauer gesagt heißt dies folgendes:

Aus (1) denken wir uns gewonnen: $\vartheta = \vartheta\,(s, a, b, C_1, C_2)$, wobei C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind. Wir fassen a, b, C_1, C_2 als Funktionen eines Parameters α auf, wobei $\alpha = 0$ der zu untersuchenden Extremale entspricht. Wir bezeichnen $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}$ mit τ und fragen, ob es eine von Null verschiedene Funktion τ gibt, die den durch Differentiation nach α aus den Rand- bzw. isoperimetrischen Bedingungen hervorgehenden Gleichungen

$$\tau\,(s_1) = \tau\,(s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \tau\cos\vartheta\,ds = \int_{s_1}^{s_2} \tau\sin\vartheta\,ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

genügt. Durch Differenzieren nach α und nachträgliches Nullsetzen von α erhalten wir aus (1)

$$\tau'' + \cos\vartheta\,\tau = C_1\cos\vartheta + C_2\sin\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wobei

$$C_1 = -\left(\frac{\partial a}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}, \qquad C_2 = -\left(\frac{\partial b}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}$$

ist. Durch zweimalige Differentiation und Elimination von C_1 und C_2 erhalten wir für τ eine lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$L_4\,(\tau) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,\mathrm{a}).$$

Aber auch ohne diese Differentlialgleichung ausführlich anzuschreiben, können wir sofort ein vollständiges Lösungssystem dieser Differentialgleichung angeben, und zwar auf Grund folgender Ueberlegung.

Sei $\vartheta\,(s)$ eine Lösung von (1), dann ist von vornherein einleuchtend, daß auch

$$\vartheta\,(s) + \alpha, \qquad \text{bzw.} \quad \vartheta\,(s+\alpha), \qquad \text{bzw.} \quad \vartheta\,(s\,e^{\alpha})$$

Extremalen darstellen. Somit ergibt sich durch Differentiation nach α und nachträgliches Nullsetzen von α, daß

$$\tau_1 = 1, \qquad \tau_2 = \varkappa, \qquad \tau_3 = s\,\varkappa$$

Lösungen von (3 a) sind. Da τ_2 bereits der zu (3) zugehörigen homogenen Gleichung genügt, ergibt sich leicht eine zweite Lösung dieser homogenen Gleichung und somit eine vierte Lösung von (3 a):

$$\tau_4 = \varkappa\int\frac{1}{\vartheta'^2}\,ds.$$

Für das zuletzt angeschriebene Integral, das wir zur Abkürzung mit t bezeichnen, ergibt sich, wie man unmittelbar durch Differentiation mit Berufung auf (1 a), (1 b) feststellen kann

$$t = \frac{1}{\sin^2\beta}\left(R\sin\vartheta - \frac{x - \cos\beta\,s}{2}\right).$$

Der willkürlichen Integrationskonstanten entspricht die Willkür des Anfangspunktes für x und s. Zunächst sei sowohl x als auch s vom Scheitel aus gerechnet.

Zur obigen Formel wird man unmittelbar geführt durch die Theorie der elliptischen Funktionen. Um den Anschluß an die üblichen (H. A. Schwarz) Bezeichnungen zu gewinnen, setze man

$$s = u, \qquad e_1 = \frac{1}{2} + \frac{\cos\beta}{6}, \qquad e_2 = -\frac{\cos\beta}{3}, \qquad e_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\cos\beta}{6},$$

also

$$\vartheta'^2 = -4\,(p\,[u+\omega_3]-e_2) \qquad \frac{1}{\vartheta'^2} = \frac{1}{\sin^2\beta}\,(p\,[u+\omega_1]-e_2).$$

Um den Zusammenhang des gesuchten Integrals mit den anschaulichen Größen x und ϑ zu finden, ist es naheliegend, den Integrationsweg vom Punkt $u_1+\omega_1$ über die Punkte $u_1+\omega_3$ $u_2+\omega_3$ zum Punkt $u_2+\omega_1$ zu leiten. Das Additionstheorem der ζ Funktion ergibt dann die oben angeschriebene Formel.

Soll nun eine von Null verschiedene lineare Kombination dieser vier Funktionen bestehen, die den Bedingungen (2) genügt, so ergibt sich unter Verwendung von

$$\overline{\tau_1} = 1, \qquad \overline{\tau_2} = \varkappa, \qquad \overline{\tau_3} = (s-s_1)\,\varkappa, \qquad \overline{\tau_4} = (t-t_1)\,\varkappa\ ^1)$$

nach einigen naheliegenden Anwendungen von partieller Integration das Jacobische Kriterium in der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & \varkappa_1 & 0 & 0 \\ 1 & \varkappa_2 & [s]_1^2\,\varkappa_2 & [t]_1^2\,\varkappa_2 \\ [x]_1^2 & [\sin\vartheta]_1^2 & [s]_1^2\sin\vartheta_2 - [y]_1^2 & [t]_1^2\sin\vartheta_2 - [R]_1^2 \\ [y]_1^2 & [-\cos\vartheta]_1^2 & -[s]_1^2\cos\vartheta_2 + [x]_1^2 & [t]_1^2\,(\cos\beta-\cos\vartheta_2) + \frac{[s]_1^2}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

durch leichte Umformung ergibt sich

$$[s]_1^2\,\varkappa_1\,\varkappa_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ [x]_1^2 & R_1\left(-\sin\vartheta_1+\frac{[y]_1^2}{[s]_1^2}\right) & R_2\left(\sin\vartheta_2-\frac{[y]_1^2}{[s]_1^2}\right) & \frac{[t]_1^2}{[s]_1^2}\,[y]_1^2-[R]_1^2 \\ [y]_1^2 & R_1\left(\cos\vartheta_1-\frac{[x]_1^2}{[s]_1^2}\right) & R_2\left(-\cos\vartheta_2+\frac{[x]_1^2}{[s]_1^2}\right) & -[t]_1^2\left(\frac{[x]_1^2}{[s]_1^2}-\cos\beta\right)+\frac{[s]_1^2}{2} \end{vmatrix} = 0;$$

subtrahiert man die zweite und dritte Kolonne von der ersten, bezeichnet man die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes mit ξ, η und setzt man ferner zur Abkürzung

$$v = \int \vartheta'^2\,ds = 2\,(x-\cos\beta\,s),$$

so erhält man unter Weglassung des Faktors $\frac{1}{[s]_1^2}$

$$\varkappa_1\,\varkappa_2 \begin{vmatrix} [\xi]_1^2\,[s]_1^2+[R]_1^2\,[y]_1^2 & [t]_1^2\,[y]_1^2-[R]_1^2\,[s]_1^2 \\ [\eta]_1^2\,[s]_1^2-[R]_1^2\,[x]_1^2 & -\tfrac{1}{2}\,[t]_1^2\,[v]_1^2+\tfrac{1}{2}\{[s]_1^2\}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

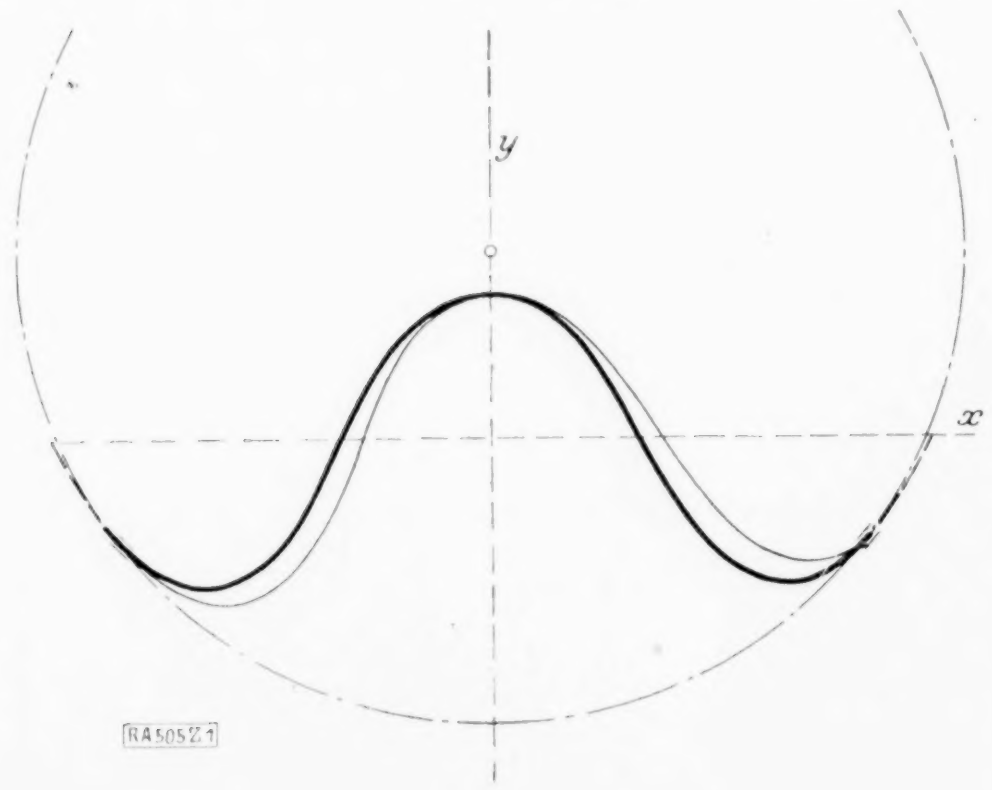


Abb. 1.

Sonderfall A: Betrachten wir nun den Fall, daß die beiden Klemmstellen, durch die die Stabilitätsgrenze gekennzeichnet ist, symmetrisch liegen. Daß es ein solches Paar geben muß, folgt daraus, daß jeder Verrückung der einen Klemmstelle eine gleichsinnige Verrückung der anderen entsprechen muß. In diesem Fall ist $y_1 = y_2$, $R_1 = R_2$. Somit wird unsere Determinantengleichung erfüllt durch

$$[\xi]_1^2 = 0,$$

d. h., wenn die beiden Klemmstellen einen gemeinsamen Krümmungskreis haben. Daß sich in diesem Fall in der Tat eine unendlich benachbarte

[1]) Der Zeiger 1 bzw. 2 bedeutet hier und im folgenden, daß die betreffenden Funktionen an der Stelle s_1 bzw. s_2 zu nehmen sind.

Extremale angeben läßt, ist auch ohne weiteres einleuchtend. Man denke sich dem zu untersuchenden Extremalenstück um den gemeinsamen Krümmungsmittelpunkt eine unendlich kleine Drehung erteilt vergl. Abb. 1, schneide ein infinitesimales Stück an der einen Stelle ab und füge es an der anderen Klemmstelle hinzu. Um aber tatsächlich behaupten zu können, daß durch diese Bedingung die Stabilitätsgrenzen gekennzeichnet sind, muß man noch zeigen, daß die Determinante für kein der Symmetrieachse näherliegendes Klemmstellenpaar verschwinden kann. Da es aber ein symmetrisches Klemmstellenpaar für die Stabilitätsgrenze geben muß, können wir uns auf die Betrachtung symmetrischer Paare beschränken. Daß vor dem ersten Wendepunkt keine Nullstelle auftreten kann, ergibt sich aus der Schwarzschen Ungleichung

$$s^2 = \Big(\int_0^s \vartheta' \cdot \frac{1}{\vartheta'}\, ds\Big)^2 < \Big(\int_0^s \vartheta'^2\, ds\Big)\Big(\int_0^s \frac{1}{\vartheta'^2}\, ds\Big).$$

Für das erste Wendepunktpaar hat die Determinante den Wert $|\,4\,\omega^1 v\,| \neq 0$.

Nach dem ersten Wendepunkt gilt für das in Betracht kommende Intervall $\xi > 0$ und somit

$$t = \frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{x + \cos\beta\, s}{2} - \xi\right) < \frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{x + \cos\beta\, s}{2}\right).$$

Wäre nun hier

$$t\,v = s^2$$

so müßte

$$\frac{1}{\sin^2\beta}(x^2 - \cos^2\beta\, s^2) > s^2 \qquad \text{also} \qquad x^2 > s^2$$

sein, was offenbar unmöglich ist.

Sonderfall B: Aus der entwickelten Formel (4) geht auch die von Born im Anschluß an Experimente angeführte Tatsache hervor, daß die Stabilitätsgrenze dann eintritt, wenn die eine Klemmstelle in einem Wendepuukt und die andere Klemmstelle in dem zweitnächsten Wendepunkt angebracht wird. Zur näheren Erörterung dieses Falles ist es aber zweckmäßig, jetzt den Anfangspunkt der Bogenlänge und den Koordinatenanfangspunkt in den Wendepunkt zu verlegen, so daß also x, z, v ungerade Funktionen der Bogenlänge sind und t durch die gleiche Formel wie früher erklärt sein möge, also ebenfalls eine ungerade Funktion von s ist. Aus demselben Grunde wie früher muß es ein Paar konjugierter Punkte geben, die um das gleiche Bogenstück vom Koordinatenanfangspunkt entfernt sind. Somit läßt sich nun unsere Determinantengleichung unter Verwendung des Lösungssystems $1,\ z,\ s\,z,\ t\,z$ in der Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & -z & s\,z & t\,z \\ 1 & +z & s\,z & t\,z \\ 2\,x & 0 & 2\,(s\sin\vartheta - y) & 2\,(t\sin\vartheta - R) \\ 2\,y & 0 & -2\,(s\cos\vartheta - x) & 2\left(t\,(\cos\beta - \cos\vartheta) + \frac{s}{2}\right) \end{vmatrix}_{s = s_1}$$

$$= 8\,z \begin{vmatrix} 1 & s\,z & t\,z \\ x & s\sin\vartheta - y & t\sin\vartheta - R \\ y & -(s\cos\vartheta - x) & t\,(\cos\beta - \cos\vartheta) + \frac{s}{2} \end{vmatrix}_{s = s_1} = 0.$$

Um den Stabilitätsbeweis zu erbringen, ist nun noch nachzuweisen, daß diese dreireihige Determinante nicht vor dem nächsten Wendepunkt verschwinden kann. Auf dieselbe Determinante wird man aber auch geführt, wenn man die Stabilitäts-Untersuchung durchführt für den Fall, daß die Elastika an einem Ende eingeklemmt und an dem anderen Ende gelenkig gelagert ist[1]). Das Variationsproblem hierfür kann sonst so wie

[1]) Dieser Fall ist verwirklicht beim Umblättern eines nicht (allzu dicken) Buches: die Fingerspitzen entsprechen der Klemme, die Befestigung des Blattes am Buchrücken kann als gelenkig betrachtet werden. Beim sehr dicken Buch treten in der Formulierung des Variationsproblems noch Ungleichungen als Nebenbedingungen auf.

früher gefaßt werden, nur mit der Ausnahme, daß nur $\vartheta(s_1)$, aber nicht $\vartheta(0)$ gegeben ist. Statt dessen kommt hier die Gleichung $\vartheta'(0) = 0$ hinzu. Dementsprechend lauten die Bedingungen für τ

$$\tau'(0) = \tau(s_1) = \int_0^{s_1} \tau \cos\vartheta \, d\,s = \int_0^{s_1} \tau \sin\vartheta \, d\,s = 0.$$

Der Stabilitätsbeweis, d. h. der Beweis daß die dreireihige Determinante in dem betrachteten Intervall nicht Null werden kann, ist somit mit Rücksicht auf die Anmerkung auf eine aus der täglichen Erfahrung geläufige Tatsache zurückgeführt, nämlich, daß beim Umblättern nur dann ein Ausspringen aus der Gleichgewichtslage stattfindet, wenn ein Wendepunkt vorhanden ist.

Auf eine Anregung des Herrn v. Mises[1]) hin behandle ich auch noch kurz den Fall, daß die Elastika an einem Ende fest eingespannt ist und am anderen Ende frei beweglich und durch ein Gewicht belastet ist vergl. Abb. 2. Es bedeute E den Elastizitätsmodul, J das Trägheitsmoment, P das belastende Gewicht. Um das Schlußresultat in möglichst anschaulicher Form aussprechen zu können, machen wir jetzt keine Festsetzung über den Längenmaßstab. Die Bogenlänge zählen wir vom belasteten Ende an, die x-Achse denken wir uns vertikal nach abwärts gerichtet und für die zu untersuchende Extremale falle das belastete Ende mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammen. Das Variationsproblem lautet

$$\int_0^{s_1} \left(\frac{1}{2} E J \vartheta'^2 + P \cos\vartheta\right) d\,s \to \text{Min},$$

wobei $\vartheta(s_1) = \vartheta_1$ gegeben und $\vartheta(0)$ frei wählbar zu denken ist, so daß also $\vartheta'(0) = 0$ ist. Die Euler-Lagrangesche Gleichung lautet:

$$\vartheta'' + \frac{P}{E J} \sin\vartheta = 0 \quad \text{also} \quad \frac{1}{2} E J \vartheta'^2 = P(\cos\vartheta - \cos\beta) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

die Jacobische Gleichung und die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$\tau'' + \frac{P}{E J} \cos\vartheta \, \tau = 0\,, \qquad \tau'(0) = 0\,, \qquad \tau(s_1) = 0.$$

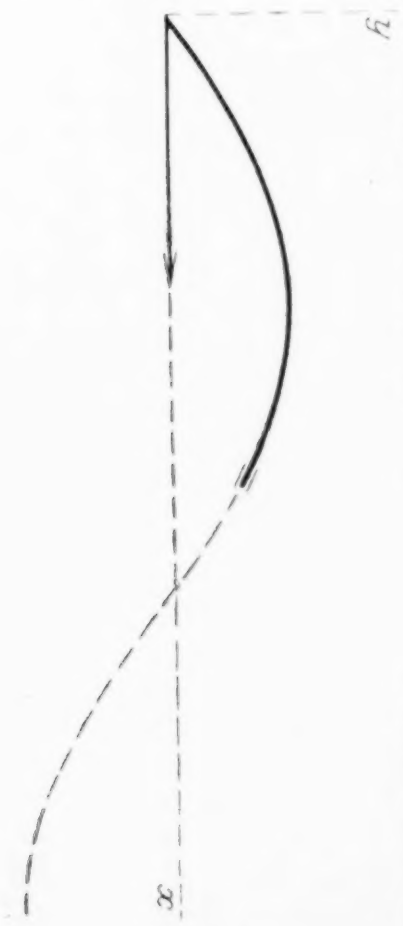


Abb. 2.

Für den Fall $\vartheta = 0$ ergibt sich die Eulersche Knickformel in der üblichen Weise. Für $\vartheta \neq 0$ ergeben sich als Partikularlösungen wie früher

$$\tau_1 = \varkappa\,, \qquad \tau_2 = \varkappa\left(R \sin\vartheta - \frac{x - \cos\beta\, s}{2}\right)$$

von denen bei analytischer Fortsetzung über das freie Ende hinaus die erste eine ungerade, die zweite eine gerade Funktion von s ist. Wenn die Klemme an der Stabilitätsgrenze eingesetzt ist, so ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} \tau_1'(0) & \tau_2'(0) \\ \tau_1(s_1) & \tau_2(s_1) \end{vmatrix} = 0$$

also $\tau_2(s_1) = 0$ somit wegen (5)

$$\Big[2\, P\, R \sin\vartheta\Big]_{s=s_1} = \frac{1}{2} E J \int_0^{s_1} \vartheta'^2 \, d\,s$$

Also: Sitzt die Klemme an der Stabilitätsgrenze, so ist die Deformationsenergie gleich der doppelten Arbeit, die man leisten müßte, um das die Deformation hervorrufende Gewicht von der Klemmstelle bis zum zugehörigen Krümmungsmittelpunkt zu heben. Hieraus geht unmittelbar hervor, daß sich diese Klemmstelle unterhalb des ersten Scheitels und oberhalb des ersten Wendepunktes befinden muß. Oberhalb des ersten Scheitels nimmt ja diese Hubarbeit nur negative Werte an, in dem bezeichneten Stück aber nimmt sie jeden beliebigen positiven Wert an. 505

[1]) Bei der Diskussion nach meinem Innsbrucker Vortrag. Wie ich bereits damals hervorhob, ist die diesbezügliche Stabilitätsuntersuchung in der erwähnten Arbeit von Born bereits vollständig durchgeführt. Durch unsere Formel erhält sie eine anschauliche Deutung. Vergl. auch eine Arbeit von v. Mises (diese Zeitschr.) Bd 3 (1923), S. 422. — Vergl. auch eine Note von v. Mises in dieser Zeitschr. Bd. 4 (1924), S. 435/436.

Vorträge der Danziger Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Von den neun Vorträgen, die auf der Danziger Jahresversammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik am 14. und 15. September 1925 gehalten wurden, erscheinen hier kurze Zusammenfassungen, die die Vortragenden selbst freundlichst zur Verfügung gestellt haben.

1. Zur Berechnung der Stabilität periodischer Bewegungsvorgänge.

Von **E. TREFFTZ** in Dresden.

Die Berechnung der Stabilität eines periodischen Vorganges

$$x = x_0(t),$$

der einer periodischen Differentialgleichung

$$x'' + F(x, x', t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

genügt, (für welche also $F(x, x', t + \omega) = F(x, x', t)$ ist) geschieht in der Weise, daß man eine von $x_0(t)$ wenig verschiedene Bewegung

$$x(t) = x_0(t) + \xi(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

betrachtet. Für die als klein vorausgesetzte Störung $\xi(t)$ gewinnt man dann eine lineare Differentialgleichung

$$\xi'' + P(t)\,\xi' + Q(t)\,\xi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

indem man unter Beschränkung auf die in ξ und ξ' linearen Glieder mit dem Ansatz (2) in die Differentialgleichung (1) eingeht. Wegen der Periodizität der Differentialgleichung (1) und ihrer Lösung $x_0(t)$ sind dann die Koeffizienten von (3)

$$P(t) = \frac{\partial F}{\partial x'_0}, \qquad Q(t) = \frac{\partial F}{\partial x_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (4)$$

ebenfalls periodische Funktionen der Zeit, und es kommt nun darauf an, zu entscheiden, ob die Lösungen von (3) mit wachsender Zeit zunehmen können (Fall der Instabilität), beschränkt bleiben (Fall der Halbstabilität), oder sämtlich abnehmen (Fall der Stabilität). Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß $P(t) = 0$ ist, auf welchen wir den allgemeinen Fall durch die Substitution $\xi = e^{-\frac{1}{2}\int P dt}\,\eta$ stets zurückführen können.

Ueber die Lösungen der Differentialgleichung

$$\xi'' + Q(t)\,\xi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gewinnt man dann in der folgenden, bekannten Weise Aufschluß. Wir stellen uns zunächst zwei Partikularlösungen $u(t)$ und $v(t)$ her, indem wir (5) von $t = 0$ bis $t = \omega$, nötigenfalls näherungsweise, integrieren. Dabei normieren wir diese Funktionen so, daß die Determinante

$$u \cdot v' - v \cdot u' = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wird, was stets möglich ist, da sie wegen $P = 0$ konstant sein muß.

Dann beherrschen wir u und v für alle Werte von t, denn wegen der Periodizität der Differentialgleichung müssen auch $u(t + \omega)$ und $v(t + \omega)$ Lösungen von (5) sein, die sich demgemäß durch die Partikularlösungen u und v mit konstanten Beiwerten in der Form

$$\left.\begin{aligned} u(t + \omega) &= \alpha_{11}\,u(t) + \alpha_{12}\,v(t) & v(t + \omega) &= \alpha_{21}\,u(t) + \alpha_{22}\,v(t) \\ u'(t + \omega) &= \alpha_{11}\,u'(t) + \alpha_{12}\,v'(t) & v'(t + \omega) &= \alpha_{21}\,u'(t) + \alpha_{22}\,v'(t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

darstellen lassen. Die Beiwerte α_{11} bis α_{22} erhalten wir, wenn wir $t = 0$ setzen zu

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} &= v'(o)\,u(\omega) - v(o)\,u'(\omega) & \alpha_{21} &= v'(o)\,v(\omega) - v(o)\,v'(\omega) \\ \alpha_{12} &= u(o)\,u'(\omega) - u'(o)\,u(\omega) & \alpha_{22} &= u(o)\,v'(\omega) - u'(o)\,v(\omega) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

(NB. $u(o)\,v'(o) - u'(o)\,v(o) = 1$). Wir können also, wenn u und v von $t = 0$ bis $t = \omega$ bekannt sind, durch wiederholte Anwendung der Substitution (7) auf $u(t + n\omega)$, $v(t + n\omega)$ schließen. Wir geben dieser Substitution die einfachste Form, wenn wir aus u und v eine Lösung

$$\eta = a\,u + b\,v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

bilden, die sich bei einem Fortschreiten um ω nur mit einem konstanten Faktor λ multipliziert. Soll

$$\eta(t+\omega) = \lambda\,\eta(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

sein, so muß

$$a\,\alpha_{11}\,u(t) + a\,\alpha_{12}\,v(t) + b\,\alpha_{21}\,u(t) + b\,\alpha_{22}\,v(t) = \lambda\,a\,u(t) + \lambda\,b\,u(t) \quad . \quad . \quad (11)$$

sein, und das ist erreicht, wenn a und b den linearen Gleichungen

$$(\alpha_{11} - \lambda)\,a + \alpha_{21}\,b = 0, \qquad \alpha_{12}\,a + (\alpha_{22} - \lambda)\,b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

genügen. Durch Nullsetzen der Determinante erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\,\lambda + (\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,\alpha_{21}) = 0 \\ &\lambda = {}^1\!/_2\left\{\alpha_{11} + \alpha_{22} \pm \sqrt{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 - 4\,(\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,\alpha_{21})}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Für jeden der beiden Wurzelwerte λ_1 und λ_2 erhalten wir dann bis auf einen konstanten Faktor aus (12) je ein Wertesystem a und b, d. h. wir erhalten zwei Lösungen unserer Differentialgleichung:

$$\eta_1 = a_1\,u + b_1\,v, \qquad \eta_2 = a_2\,u + b_2\,v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

für welche

$$\eta_1(t+\omega) = \lambda_1\,\eta_1(t), \qquad \eta_2(t+\omega) = \lambda_2\,\eta_2(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ist. Da wegen (6), wie man leicht nachrechnet,

$$\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,\alpha_{21} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ist, ist das Produkt

$$\lambda_1\,\lambda_2 = \alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,\alpha_{21} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Sind also die Wurzeln reell, so muß eine Wurzel, sagen wir λ_1, größer als eins sein. Dann haben wir den Fall der Instabilität, denn es gibt eine Lösung η_1 der Differentialgleichung, welche sich bei jedem Fortschreiten vergrößert. Sind die Wurzeln komplex, so liegt »Halbstabilität« vor, denn dann ist

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

also

$$|\eta_1(t+\omega)| = |\eta_1(t)|, \qquad |\eta_2(t+\omega)| = |\eta_2(t)| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

η_1 und η_2 bleiben somit beschränkt, und damit auch jede Lösung der Differentialgleichung, da sich jede aus η_1 und η_2 mit konstanten Beiwerten linear zusammensetzt. Der Fall gleicher Wurzeln gehört zum instabilen Typus, wenn nicht schon u und v beide periodisch waren.

Die Schwierigkeit der Stabilitätsberechnung beruht also lediglich darin, bei einer approximativen Integration die Größen α_{11} bis α_{22} mit genügender Genauigkeit zu erhalten, und die folgende Erleichterung der Rechnung besteht darin, daß für die in Frage kommenden Größen eine Integraldarstellung gegeben wird, welche auch dann noch gut konvergiert, wenn u und v selbst nur mit geringer Genauigkeit ermittelt sind. Diese Integraldarstellung erhalten wir folgendermaßen: wir formen die Integrale

$$\left.\begin{aligned} J(u,u) &= \int_0^\omega \{u'(t)\,u'(\omega - t) + Q(t)\,u(t)\,u(\omega - t)\}\,dt \\ J(u,v) &= \int_0^\omega \{u'(t)\,v'(\omega - t) + Q(t)\,u(t)\,v(\omega - t)\}\,dt \\ J(v,u) &= \int_0^\omega \{v'(t)\,u'(\omega - t) + Q(t)\,v(t)\,u(\omega - t)\}\,dt \\ J(v,v) &= \int_0^\omega \{v'(t)\,v'(\omega - t) + Q(t)\,v(t)\,v(\omega - t)\}\,dt \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (20)$$

durch partielle Integration um, z. B.

$$J(u,u) = [-u'(t)\,u(\omega - t)]_0^\omega + \int_0^\omega u(\omega - t)\,\{u''(t) + Q(t)\,u(t)\}\,dt,$$

also $$J(u,u) = -u'(\omega)\,u(o) + u'(o)\,u(\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und erhalten, da das Integral wegen der Differentialgleichung fortfällt

$$J(u,u) = -\alpha_{12}, \qquad J(u,v) + J(v,u) = \alpha_{11} - \alpha_{22}, \qquad J(v,v) = \alpha_{21} \quad . \quad (22).$$

Fügen wir zu diesen Größen noch $\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{21}\,\alpha_{12} = 1$, so können wir aus ihnen die λ Werte berechnen, die wir in der Form:

$$\lambda = {}^1/_2 \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) + 4\,\alpha_{12}\,\alpha_{21}} \pm {}^1/_2 \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\,\alpha_{12}\,\alpha_{21}} \quad (23)$$

schreiben können. Insbesondere erhalten wir als Bedingung für die Realität von λ (Instabilität)

$$\{J(u,v) + J(v,u)\}^2 \geqq 4\,J(u,u)\,J(v,v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Ueber eine Anwendung der dargelegten Methode und über eine Vereinfachung in speziellen Fällen wird an anderer Stelle berichtet werden. 585

2. Energiekriterium der Knicksicherheit.

Von **H. REISSNER** in Charlottenburg.

Energiekriterien für das Ausknicken von Stäben und Platten sind wohl von Bryan[1]) zuerst angegeben und von Timoschenko[2]) ausgebaut worden. Diese unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen entspringende, sehr geistreiche Methode scheint weder von andern Forschern noch von Lehrbüchern mehr als andeutungsweise aufgenommen worden zu sein, obgleich sie, wie ich nachher noch zeigen will, die anderen Verfahren an Einfachheit, Tragweite und Gültigkeisbereich übertrifft.

Vielleicht liegt dies zum Teil an einer gewissen Lückenhaftigkeit der Darstellung der beiden Autoren, die z. B. eine Wiedergabe vor den kritischen Ohren von Hochschulhörern fast unmöglich macht, und die Uebereinstimmung mit den andern gebräuchlichen Ansätzen der Knicktheorie nicht erkennen läßt[3]). Aus dieser nicht genügenden Ausarbeitung der Methode hatte sich auch eine gewisse Unsicherheit über ihren Gültigkeitsbereich für Randkräfte und Volumenkräfte (Eigengewicht) ergeben.

Ich hoffe deshalb, daß Sie es in didaktischem und in heuristischem Interesse nicht überflüssig finden, daß ich im folgenden versuche, eine sorgfältige Ableitung des Bryanschen Energiekriteriums, seiner Verbindung mit der Differentialgleichung des Problems und der Timoschenkoschen Anwendung der Ritzschen Minimalfolgen[4]) auf dieses Kriterium zu geben. Ich möchte mich dabei allerdings beschränken, auf die Besprechung der dünnen ebenen, elastischen Platte, aus der die Kriterien des dünnen Stabes als Sonderfall abgelesen werden können.

1. Wie üblich führen wir als Spannungsresultanten, genommen über die Dicke der Platte und die Längeneinheit in der Mittelebene, die drei sogen. Längsspannungen σ_x σ_y und τ und die drei Biegungsmomente m_x m_y und n ein. Die Voraussetzungen der elementaren Plattentheorie, daß die Plattendicke δ klein sei gegen die Längsabmessungen und die Durchbiegung klein gegen die Plattendicke, sind bei der Frage nach dem Beginn des Ausknickens besonders gut erfüllt. Mit w als Durchbiegung senkrecht zur Plattenebene, mit einer sogenannten Biegungssteifigkeit $N = \dfrac{E\,\delta^3}{12\,(1-\nu^2)}$ und mit den Krümmungsgrößen $\varkappa_x = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\varkappa_y = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\lambda = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$ darf man dann bekanntlich als Spannungs-Formänderungsbeziehungen schreiben:

$$m_x = N(\varkappa_x + \nu\,\varkappa_y), \qquad m_y = N(\varkappa_y + \nu\,\varkappa_x), \qquad n = N(1-\nu)\,\lambda$$

und als Formänderungsarbeit der Biegung:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int dF\,[m_x\,\varkappa_x + m_y\,\varkappa_y + 2\,n\,\lambda] = \frac{N}{2}\int dF\left[(\Delta w)^2 - 2\,(1-\nu)\left\{\frac{\partial^2 w\,\partial^2 w}{\partial x^2\,\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}\right].$$

---

[1]) Cambr. Phil. Soc. Proc. vol. VI 1888 Lond. Math. Soc. Proc. XXII, 1891.

[2]) Ann des Ponts et chaussées Fasc. III, IV. V 1913. — Z. f. Math. u. Phys. Bd. 58 (1910). — Eisenbau XII (1921).

[3]) Vielleicht ist dies auch der Grund, warum Love in seinem klassischen Lehrbuch der Elastizitätslehre zwar die Ergebnisse von Bryan über Plattenknickung wiedergibt, aber zu ihrer Ableitung nicht das Energiekriterium, sondern die Gleichgewichtsbedingungen bei endlichen Verschiebungen anwendet. Love, Elastizität, 2. Aufl., Teubner, S. 635.

[4]) Journ. f. r. u. angew. Math. Bd. 135 (1909).

Es sei nun eine ebene Platte mit irgend welchen Rand- und Volumenkräften, welche in der Mittelebene wirken, und mit irgend welchen geometrischen Rand- oder Stützbedingungen gegeben. Es wird sich zunächst ein ebener Spannungszustand mit Längsspannungen σ_x σ_y τ allein und mit eben bleibender Platte bilden, aber er wird bekanntlich bei Ueberschreitung einer gewissen kritischen Grenze in einen Zustand der Biegung übergehen. Das Grundproblem besteht nun in der Frage nach dieser kritischen Grenze.

Ich gehe, um einen ganz klaren Ansatz zu haben, von der Gesamtarbeit der äußeren Kräfte A_2, nämlich der Arbeit der Randspannungen und der Volumenkräfte aus und formuliere den Knickungsbeginn durch die Gleichheit der bei einer Wölbung auftretenden Zusatzarbeit der Randkräfte und Volumenkräfte einerseits, und derjenigen der Spannungen, d. h. sowohl der Längsspannungen als der Biegungsmomente andererseits, wobei für die äußere Arbeit vorausgesetzt werden soll, daß die Knickung erzeugenden Rand- und Volumenkräfte nur bei den Verschiebungen parallel der ursprünglichen Plattenebene Arbeit leisten.

Reicht nämlich bei irgend einem, nach Vollendung der ebenen Verzerrung eintretenden, zusätzlichen Verschiebungszustand u, v, w die äußere Arbeit gerade aus, um die zu diesem Verschiebungszustand zugehörige, innere Arbeit zu erzeugen, so ist das Gleichgewicht gegen Auswölben indifferent. Es kommt dann darauf an, denjenigen Verschiebungszustand zu finden, für welchen die zugehörige Biegungssteifigkeit N ein Maximum ist, da dieser als maßgebender vor allen andern Zuständen eintreten wird und die Knickbelastung liefert.

Ich beginne also mit dem folgenden Ansatz für das indifferente Gleichgewicht des Knickungsbeginnes:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int dF\,[\sigma_x\,\varepsilon_x + \sigma_y\,\varepsilon_y + \tau\,\gamma] + A_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wo für σ_x, σ_y und τ wegen der Fortlassung der unendlich kleinen Größen höherer Ordnung die ursprünglichen Spannungen des ebenen Problems zu setzen sind.

Für diese Gleichung sind nun die durch die unendlich kleine Verschiebung u, v, w entstehenden, unendlich kleinen Zusatzdehnungen und Gleitungen ε_x, ε_y und γ zu berechnen wie folgt: Das Längenelement in Richtung der x-Achse ist bis auf Größen zweiter Ordnung gegeben durch:

$$ds = dx_0\,\sqrt{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = dx_0\left(1+\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]^2\right)$$

und entsprechend auch für die y-Achse. Die gleichzeitig entstehende Winkeländerung ergibt sich aus der Winkelberechnung der mit der Plattenverschiebung mitgehenden x- und y-Achse zu:

$$\delta\cos(xy) = \cos x x_0 \cos y x_0 + \cos x y_0 \cos y y_0 + \cos x z_0 \cos y z_0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Es werden also die wirklichen, zusätzlichen Dehnungen und Gleitungen, die einem Verschiebungszustand u, v, w entsprechen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \qquad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

In Gl. (1) treten nun in der äußeren Arbeit A_2 und in dem ersten Integral der rechten Seite alle drei Verschiebungen u, v, w und deren Ableitungen scheinbar voneinander unabhängig auf. Man kann nun aber alle Ausdrücke, die u und v enthalten, fortschaffen und eine sehr vereinfachte Gleichung, eben die Bryansche erhalten, wenn man ein zweites, fingiertes Hilfssystem in folgender Weise benutzt:

Das Hilfssystem sei eine eben bleibende, mit der vorgelegten gleiche Platte, welche die nur gedachten Dehnungen und Gleitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ und die zugehörigen, mit den wirklichen übereinstimmenden Randverschiebungen u und v erfährt. Für dieses System muß ebenfalls die Arbeitsgleichheit zwischen äußerer und innerer Arbeit gelten in der Beziehung:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int dF\left[\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} + \tau\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right].$$

Zieht man diese Hilfsgleichung von der wirklichen Arbeitsgleichung (1) ab, so ergibt sich die Bryansche Gleichung in der Form:

$$\int dF\left[\frac{\sigma_x}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\sigma_y}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \tau\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$
$$+ \int N\,dF\left[(\Delta w)^2 - 2\,(1-\nu)\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Bryan und Timoschenko nehmen in ihrer Ableitung das erste Integral der linken Seite von (2) von vornherein ohne Begründung als Zusatzarbeit der Längsspannungen bei einer ebenfalls ohne Begründung als verzerrungsfrei bzw. rein normal ausgerechneten Auswölbung, bei der dann aber doch $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$ und $\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$ als Dehnungs- und Gleitungswege der Längsspannungen σ_x, σ_y und τ benutzt werden.

Von der eigentlichen Ursache der Knickung, nämlich der äußeren Arbeit der Rand- und Volumenkräfte, wird bei ihrer Ableitung überhaupt nicht gesprochen, so daß es auch nicht klar wird, ob die Gl. (2) nur für Randkräfte oder auch für Volumenkräfte gelten soll. Es ist sehr merkwürdig, daß bei dieser Art der Ableitung doch ein richtiges Endergebnis herausgekommen ist.

Die hier gegebene Ableitung zeigt, daß die Bedingung (2) bei beliebigen äußeren Rand- und Volumenkräften gültig ist.

2. Wesentlich für die Ausnutzung dieser Bryanschen Bedingung ist nun eine daran schließende Maximumbedingung, welche Bryan und Timoschenko nicht recht deutlich formuliert haben, nämlich etwa die folgende:

Es soll bei gegebenen Längsspannungen σ_x σ_y und τ diejenige Wölbungsfunktion $w = w(x, y)$ angegeben werden, welche einem Maximalwert der Biegungssteifigkeit N der Platte entspricht, also:

$$N = \frac{\int dF\left[\sigma_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \sigma_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \tau\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]}{\int dF\left[(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}\right]} = \text{Max.} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Der von Timoschenko eingeschlagene Weg besteht nun darin, für w eine endliche Reihe von Funktionen zu setzen, die der erwarteten Wölbungsform etwa entsprechen, und deren Reihenkoeffizienten durch eine gewöhnliche Maximumbetrachtung so zu bestimmen, daß N ein Maximum wird, wobei nach dem Vorgange von Ritz bei einem analogen Problem vorausgesetzt wird, daß dieses Verfahren genügend gut konvergiert.

Andererseits muß aber die konsequente Durchführung des Variationsproblem zu der Differentialgleichung des Problems und zu dessen Grenzbedingungen führen, d. h., zu der Differentialgleichung der Plattenknickung. Eine solche, bisher nur für die Knickung des Stabes von Timoschenko angegebene Rechnung liefert in der Tat bei fehlenden Volumenkräften (Eigengewicht) die bekannte Differentialgleichung der Knickung und zeigt, wie diese Differentialgleichung für Volumenkräfte erweitert werden muß. Es ergibt sich also dabei eine neue Differentialgleichung z. B. für den wichtigen Fall einer senkrechten, schweren, auf Knicken beanspruchten Wand.

Es ist die erste Variation zum Verschwinden zu bringen; d. h. wenn J_2 und J_1 Zähler und Nenner der Gl. (3) bedeuten:

$$\delta N = \delta\frac{J_2}{J_1} = \frac{1}{J_1}\left(\delta J_2 - \frac{J_2}{J_1}\delta J_1\right) = \frac{1}{J_1}(\delta J_2 - N\cdot\delta J_1) = 0$$

und es entsteht bei der Durchführung der Rechnung, indem durch partielle Integration alles auf den Faktor δw gebracht wird, die Differentialgleichung des Problems:

$$N(\Delta\Delta w) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \quad . \quad (4).$$

Die bekannte Differentialgleichung der Knickung bei Abwesenheit von Volumenkräften lautet:

$$N(\Delta\Delta w) - \sigma_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\tau\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,\text{a}),$$

welche in der Tat dann und nur dann aus der darüber stehenden abgeleitet werden kann, wenn die Volumenkräfte fehlen und man die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau}{\partial x} = 0.$$

beachtet.

Das Energiekriterium liefert also in zwei Beziehungen mehr als die bisher bekannte Differentialgleichung. Erstens erlaubt es durch eine Reihe von Minimalfolgen von endlichen Reihen die angenäherte Bestimmung der Wölbungsform und Knicksteifigkeit N, zweitens liefert es die bisher nicht bekannte und auf andere Weise schwierig abzuleitende Differentialgleichung auch bei Anwesenheit von Volumenkräften.

Die obige Form der Variation erscheint als isoperimetrisches Problem, durch welches wohl der Ritzsche Beweis für die Zulässigkeit und Konvergenz seiner Koeffizientenmethode und übrigens auch dessen Courantsche Verbesserung [1]) auch auf das vorliegende Problem ausgedehnt werden kann. Dieses isoperimetrische Problem könnte so ausgesprochen werden: Es soll diejenige Wölbungsform $w(x\,y)$ angegeben werden, welche die Arbeit $A_2 = {}^1/_2\, J_2$ zu einem Maximum macht, mit der Nebenbedingung, daß die Biegungsarbeit $A_1 = \frac{N}{2}\, J_1$ einen vorgeschriebenen Wert hat.

Die Bryansche Bedingung (3) ist offenbar auch für veränderliche Wandstärke, d. h. für veränderliches N sofort zu verwenden, wenn man die Biegungssteifigkeit N nicht mehr vor, sondern unter das zugehörige Integralzeichen setzt; nur muß man darauf achten, daß auch die Spannungen σ_x, σ_y und τ des ebenen Grundproblems unter der Voraussetzung der veränderlichen Wandstärke bestimmt werden.

Dagegen ist die Erweiterung der Methode des Energiekriteriums auf gewölbte Schalen deswegen nicht so einfach zu formulieren, weil die Ausrechnung der Dehnungen und Gleitungen, die eine Auswölbung begleiten, bis zu den kleinen Größen zweiter Ordnung und ihr Zusammenhang mit den Arbeitswegen der äußeren Kräfte erheblich verwickelter.

Für die ebene Platte findet man eine Reihe von wichtigen Fällen bei Bryan und Timoschenko behandelt, wobei es immer darauf hinaus kommt, entweder ein partikuläres Integral von (4a) oder — wenn ein solches nicht bekannt ist — eine möglichst wahrscheinliche Form der Wölbungsfläche für $w = w(x, y)$ einzuführen.

Man sollte die oben beschriebene Methode aber auch in Zukunft für die vielen noch ungelösten Stabilitätsprobleme des neuzeitlichen Maschinen- und Bauwesens fruchtbar machen. 575

3. Die Energiegrenze der Elastizität (Plastizitätsbedingung).

Von **FERD. SCHLEICHER** in Karlsruhe.

Die Frage, welche Umstände bedingen bei einem bestimmten, bekannten Spannungszustande das Erreichen der Elastizitäts- bezw. der Fließgrenze, kann auch heute noch nicht eindeutig beantwortet werden, trotz der vielen Versuche, die schon zu ihrer Klärung unternommen wurden.

Das folgende ist auf solche homogene Stoffe beschränkt, für die das Hookesche Gesetz bis zur Elastizitätgrenze gilt und auf Verzerrungszustände, die unterhalb der Elastizitätsgrenze bleiben. Lokale Verfestigung infolge einer früheren Ueberschreitung der Fließgrenze sei also ausgeschlossen. Sodann ist die Beurteilung der Beanspruchung bei einem einachsigen Spannungszustande auf die einfachste Weise möglich, da man den berechneten Spannungswert ohne weiteres mit den im Zug- bezw. Druckversuch festgestellten Werten der Fließgrenzspannung vergleichen kann. Die verschiedenen Hypothesen für die Beurteilung allgemeiner, dreiachsiger Spannungszustände sind bekannt. Eine kritische Untersuchung der bisher bekannten Hypothesen über die Elastizitäts- bezw. Fließgefahr zeigt, daß diese Hypothesen zum Teil in grobem Widerspruch mit der Erfahrung stehen, zum Teil noch ungenügend mit letzterer übereinstimmen.

Eine Uebereinstimmung mit den bisher vorliegenden Versuchsergebnissen wird erreicht, wenn man die Hypothese der Energiegrenze der Elastizität in folgender Form ausspricht:

> »Das Maß für die Höhe der Beanspruchung ist die gesamte in der Raumeinheit aufgespeicherte Formänderungsarbeit A. Die Vergleichsspannung mit der Grenzspannung σ_F im Zug- bezw. Druckversuch ist durch $\sigma_e = \sqrt{2\,E\,A}$ gegeben. Die der Fließgrenze entsprechende Vergleichsspannung σ_F hat jedoch erfahrungsgemäß keinen für alle Spannungszustände konstanten Wert, sondern ist eine Funktion der mittleren Normalspannung $p = {}^1/_3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ oder was auf das gleiche herauskommt, der bezogenen Volumdehnung $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.«

Die Parameter p und e sind bekanntlich Invarianten des Spannungs- bezw. des Verzerrungstensors. Die Funktion $\sigma_e(p)$ ist, ähnlich wie bei der Mohrschen Hypothese die Umhüllungskurve der Spannungskreise, für jedes Material durch Versuche zu bestimmen.

[1]) Siehe z. B. Differential- und Integralgleichungen der Phys., herausgeg. von R. v. Mises, Verlag Vieweg, 1925. Bd. I, S. 676 (Artikel Courant).

Ein Vergleich dieser Hypothese mit den Versuchswerten von v. Kármán, Böker, Guest, Lode, ergibt scharf ausgeprägte Gesetzmäßigkeit für die Funktionen $\sigma_e = \sigma_e(p)$[1]).

Nach der neuen Hypothese ist im allgemeinen für Werte $p > p_{max}$ oder $p < p_{min}$ kein Spannungszustand mit rein elastischen Verzerrungen möglich. Für das Intervall $p_{min} < p < p_{max}$ sind die Verzerrungen nur dann elastischer Art, wenn noch die Bedingung $\sqrt{2EA} < \sigma_e(p)$ erfüllt ist. Die p, σ_e-Ebene zerfällt somit in zwei Bereiche: in einen Bereich der elastischen und in einen der unelastischen Formänderungen. Die Beanspruchung durch einen allseitigen gleichen Druck $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p_{min}$ ist als ein kritischer Zustand anzusehen, da schon sehr kleine Abweichungen vom Gleichgewichtszustand ein Fließen des Materials zur Folge haben.

In der Haighschen Darstellung ist der Inhalt der neuen Hypothese folgender: Alle Spannungszustände, die unterhalb der Elastizitätsgrenze bleiben, entsprechen Punkten (die Hauptspannungen des Spannungszustandes als kartes. Koordinaten aufgefaßt), welche im Inneren einer Rotationsfläche liegen, deren Meridiankurve je nach der Funktion $\sigma_e(p)$ verschieden ist. Schließt man unendlich große Spannungen aus, so ist die Grenzfläche geschlossen, entsprechend der nur im Intervalle $p_{min} < p < p_{max}$ existierenden Funktion $\sigma_e(p)$. Alle die Spannungszustände mit der gleichen mittleren Spannung p entsprechen Punkten, die einen Breitekreis der Grenzfläche erfüllen. Kann man die Funktion $\sigma_e(p)$ im ganzen Intervalle von p durch eine lineare Funktion von p darstellen, so ist die Grenzfläche ein Rotationsellipsoid, dessen Mittelpunkt jedoch i. A. nicht in der Ebene $p = o$ liegt. Gleiches gilt unter gewissen Einschränkungen für parabolische Gesetze $\sigma_e(p)$.

Die vorgeschlagene neue Hypothese der Energiegrenze der Elastizität gibt die bis heute vorliegenden Versuchsergebnisse besser wieder als die älteren Hypothesen. Auch in jenen Fällen, da z. B. die Mohrsche Hypothese versagt, insofern sie den Einfluß der Höhe der mittleren Normalspannungen nicht erklärt, ergeben sich keinerlei Schwierigkeiten. Der neuen Hypothese sind alle Vorzüge des Beltramischen Vorschlags eigen. Ein besonderer Vorzug ist es wohl, daß die Schwierigkeiten bei Baustoffen mit verschiedenen Fließgrenzspannungen für einachsigen Zug und für einachsigen Druck, die bei vielen der älteren Hypothesen auftraten, ganz wegfallen, da sich der Uebergang zwischen den beiden Größen ganz von selbst und stetig mit veränderlichen p vollzieht. Ob bei größerer Ueberschreitung der Fließgrenze Trennungsbruch oder Gleitungsbruch eintritt, scheint für die Anwendung der Hypothese bedeutungslos zu sein und eine Bruchhypothese soll sie nicht sein.

Der ungefähre Verlauf der Funktion $\sigma_e(p)$ für Marmor und Eisen ist aus Abb. 1 zu ersehen und zwar entspricht die mit M bezeichnete Kurve Marmor und die Kurve E Eisen. Die beiden Kurven M und E sind wohl als typisch für spröde Stoffe bzw. für dehnbare Metalle anzusprechen. Bei dehnbaren Metallen wird es sich, solange keine weiteren diesbezüglichen Versuche vorliegen, für den praktischen Gebrauch der Hypothese zur Beurteilung der Beanspruchung empfehlen, $\sigma_e(p) = \sigma_e(o)$, d. h. konstant anzunehmen, wobei man auf der sicheren Seite bliebe, da für dehnbare Metalle bei oder in der Nähe von $p = o$ ein Kleinstwert von $\sigma_e(p)$ einzutreten scheint. Für spröde Materialien, vor allem bei Gesteinen, ist diese Vereinfachung nicht zulässig, da die Vergleichsspannungen $\sigma_e(p)$ im Zuggebiete $(p > o)$ im allgemeinen sehr viel kleiner sind als $\sigma_e(o)$. 582

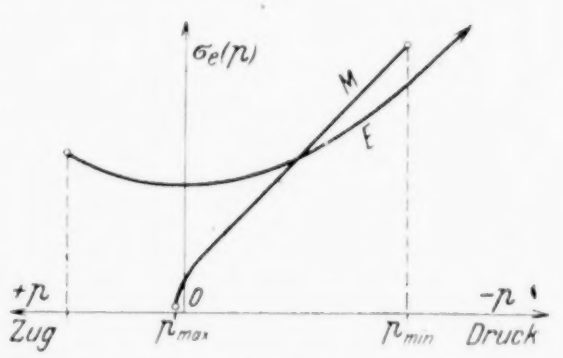


Abb. 1.

4. Über eine Methode zur angenäherten numerischen Lösung des zweiten Randwertproblems der harmonischen Differentialgleichung.

Von **FRANZ WOLF** in Danzig.

Zur angenäherten numerischen Lösung von Randwertaufgaben ersetzt man in letzter Zeit vielfach Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen und erreicht dadurch die Bestimmung einer diskreten Anzahl von Näherungswerten der gesuchten Funktion in einem Bereich aus vorgegebenen Randbedingungen. Die Laplacesche Gleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

[1]) Nähere Mitteilungen darüber sind in einem ausführlichen Aufsatze des Verf. zu finden, der in einem der nächsten Hefte dieser Zeitschrift erscheinen wird.

geht dabei über in eine lineare Gleichung, die, gleich zweckmäßig geordnet, folgende Form hat:

$$w(x, y) = {}^1/_4 [w(x+1, y) + w(x, y+1) + w(x-1, y) + w(x, y-1)].$$

w an einer Stelle x, y soll hiernach also immer das arithmetische Mittel von vier in den Achsenrichtungen im Abstand Eins benachbart gelegenen Werten sein. Zur Lösung der ersten Randwertaufgabe, wo im Innern eines Bereichs die harmonische Funktion w gesucht wird, die auf dem Rand vorgegebene Werte annimmt, verwendet man diese Laplacesche Differenzengleichung folgendermaßen: Man zeichnet in den Bereich ein Netz von quadratischen Maschen von der Seitenlänge Eins ein, dessen Gitterpunkte außen mit dem Rand zusammenfallen sollen, und schreibt diesen Randgitterpunkten die in der Aufgabe vorgegebenen Werte bei. Dann braucht man nur der Reihe nach für jeden inneren Gitterpunkt die obige Laplacesche Differenzengleichung anzusetzen, indem man x und y die entsprechenden Werte erteilt, und erhält so ein System von ebensovielen linearen Gleichungen, als innere Funktionswerte auf den Gitterpunkten gesucht sind. Dies hat man aufzulösen, um sofort eine Anzahl von Näherungswerten für das gegebene Problem zu bekommen.

Wegen der Schwierigkeiten, die sich der praktischen Auflösung größerer Gleichungssysteme entgegenstellen, läßt dieses Verfahren allerdings nur eine sehr grobe Unterteilung des Bereichs zu. Bedeutend weiter führt hierin eine 1918 von Herrn Liebmann gefundene Methode, die die strenge Auflösung des Systems umgeht und die gesuchten Funktionswerte auf einem sehr bequem zu handhabenden Weg der successiven Approximation gewinnt. Herr Liebmann schreibt dabei nicht nur den Randpunkten die vorgegebenen Werte, sondern gleichzeitig allen inneren Gitterpunkten möglichst günstig zu wählende Rohwerte zu, die er dann mittels der Laplaceschen Differenzengleichung dadurch verbessert, daß er alle Innenwerte, von außen nach innen fortschreitend, der Reihe nach durch das arithmetische Mittel der Nachbarn ersetzt. Nach Beendigung dieses Verfahrens braucht natürlich zunächst kein Wert, der schließlich dasteht, das arithmetische Mittel seiner Nachbarn zu sein. Denn man hat ja während des Weiterrechnens auch die Nachbarn wieder abgeändert. Führt man aber dasselbe Verfahren immer und immer wieder durch, so wirken die richtigen Randwerte bei der ständigen Mittelbildung allmählich so auf das Innere ein, daß die Innenwerte doch schließlich alle die Forderung der Laplaceschen Differenzengleichung erfüllen. Der Beweis dieser Konvergenz gegen die strengen Lösungen des linearen Gleichungssystems ist erbracht für Bereiche, deren Rand mit der Gittereinteilung zusammenfallen muß, und die nur endlich viele Gitterpunkte enthalten dürfen. Sonst aber können sie von ganz beliebiger Gestalt sein. Wir setzen im folgenden dieses Verfahren als bekannt voraus.

Die zweite Randwertaufgabe erfordert die Bestimmung einer harmonischen Funktion w im Innern eines Bereichs dann, wenn statt der Funktion selbst auf dem Rand die Ableitung $\frac{\partial w}{\partial n}$ nach der nach innen gerichteten Normalen vorgegeben ist. Dabei muß das über den Rand erstreckte Integral $\oint \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0$ sein. Zur angenäherten Lösung dieser Aufgabe benutzen wir wieder die Laplacesche Differenzengleichung und überdecken den Bereich daher in der gleichen Weise wie früher mit einem quadratischen Netz von Gitterpunkten mit der Maschenweite Eins. Ferner ersetzen wir die Ableitung $\frac{\partial w}{\partial n}$ längs des Randes durch den jeweiligen Unterschied d zwischen einem Wert w des ersten inneren Ringes von Gitterpunkten und dem ihm benachbarten Wert r auf dem Rand, also durch $d = w - r$. Diese Größe heiße Steigung. Dann ist die Aufgabe, aus einem System von vorgegebenen Steigungen d eine Funktion w zu berechnen, die im Innern der Laplaceschen Differenzengleichung genügt, eine harmonische Gitterfunktion, wie wir sagen, und die längs des Randes die gegebenen Steigungen d annimmt. w ist dadurch genau wie im Falle der Differentialgleichung nur bis auf eine Konstante bestimmt. Die oben für die Ableitung $\frac{\partial w}{\partial n}$ angegebene Integralbedingung geht für die Steigungen über in die Forderung, daß die Summe aller vorgegebenen d, also $\Sigma d = 0$ sein muß. Wir beschränken uns im weiteren der Kürze wegen auf Bereiche, deren Umrandung keine einspringenden Ecken hat, d. h. auf Rechtecke. Für den allgemeinen Fall von Gitterbereichen mit einspringenden Ecken würde die Betrachtung etwas umständlicher. Durchführen läßt sie sich aber auch dann ohne Schwierigkeit.

Die Approximation der gesuchten Funktion mit den vorgegebenen Steigungen d geschieht nun so: Man schreibt zunächst allen Randpunkten irgendwelche Rohwerte r_0 zu und berechnet hierzu durch Lösung der ersten Randwertaufgabe mittels des Liebmannschen Verfahrens diejenige harmonische Gitterfunktion w_0 im Innern, die die r_0 zu Randwerten hat. Die Steigungen dieser Funktion sind dann $d_0 = w_0 - r_0$, wenn diese beiden letzten Größen je zwei benachbarte Werte auf dem ersten Innenring und auf dem Rand bedeuten. Da die d_0 wohl im allgemeinen durchaus nicht mit den in der Aufgabe geforderten d übereinstimmen, so hat man nun folgenden ersten Schritt der Annäherung durchzuführen: Man nimmt alle bisherigen Randwerte r_0 weg und setzt an ihre Stelle bessere Werte r_1, die dadurch gebildet werden, daß man von jedem Funktionswert des ersten Innenrings aus mittels der an der betreffenden Stelle geforderten Steigung d den Randwert extrapoliert. Man erhält so die neuen Werte $r_1 = w_0 - d$; w_0 bedeutet dabei jeweils einen Wert des ersten Innenrings. Zu diesen neuen r_1 als Randwerten ist dann wieder die erste Randwertaufgabe nach der Liebmannschen Methode zu lösen, wodurch im Innern die Werte w_1 einer neuen harmonischen Gitterfunktion entstehen. Ihre Steigungen längs des Randes haben jetzt die Größe $d_1 = w_1 - r_1$, wo w_1 und r_1 wieder Nachbarwerte auf dem ersten Innenring und dem Rand bedeuten sollen. Der zweite Schritt der Annäherung geschieht auf die gleiche Weise. Die Randwerte r_1 werden ersetzt durch neue, $r_2 = w_1 - d$. Unter w_1 ist dabei immer ein Wert des vorigen Schrittes auf dem ersten Innenring und unter d die jeweils an der betreffenden Stelle geforderte Steigung zu verstehen. Mit den r_2 als Randwerten führt man dann wieder die erste Randwertaufgabe durch, was zu den Innenwerten w_2 führt, und es entstehen für die neue harmonische Gitterfunktion r_2, w_2 in analoger Weise die Steigungen $d_2 = w_2 - r_2$.

Allgemein werden beim ν-ten Schritt der Annäherung neue Randwerte r_ν aus den $w_{\nu-1}$ des ersten Innenrings durch Extrapolatation mittels der geforderten Steigungen d berechnet, sodaß also wird: $r_\nu = w_{\nu-1} - d$. Zweitens werden zu diesen r_ν als Randwerten durch das Liebmannsche Verfahren die Innenwerte w_ν einer neuen harmonischen Gitterfunktion berechnet, und die neuen Steigungen zwischen Rand und erstem Innenring sind $d_\nu = w_\nu - r_\nu$. Man sieht, das Verfahren ist dann beendet, wenn die d_ν längs des ganzen Randes mit den vorgegebenen d bis auf irgend eine anfänglich festzusetzende Genauigkeit übereinstimmen. Die Anzahl der hierzu notwendigen Schritte der Annäherung hängt ganz wesentlich ab von einer möglichst sorgfältigen Wahl der ersten Randwerte r_0, worauf der Rechner sehr zu achten hat, wenn das Verfahren rasch konvergieren soll. Die praktischen Rechenschwierigkeiten, die das Verfahren wegen der Aufeinanderfolge zahlreicher erster Randwertaufgaben enthält, sind übrigens wesentlich kleiner, als man zuerst meint. Die Nährungsfunktionen r_ν, w_ν der einzelnen Schritte unterscheiden sich nämlich nur sehr wenig voneinander, sodaß man von einem zum folgenden Schritt oft viele Zahlen einfach ohne Rechnung übernehmen kann.

Wegen eines Konvergenzbeweises und aller sonstigen Einzelheiten, Genauigkeitsuntersuchungen und Literaturangaben sei auf die demnächst in dieser Zeitschrift erscheinende Veröffentlichung hingewiesen. 576

5. Anwendung der konformen Abbildung auf die Berechnung von Strömungen in Kreiselrädern.

(Erste und zweite Randwertaufgaben.)

Von **W. SPANNHAKE** in Karlsruhe i. B.

1. Stellung der Aufgabe. Behandelt wird das (ebene) Problem einer parallelkränzigen Kreiselpumpe mit zylindrischen Schaufeln. Um einen möglichst allgemeinen Fall zu betrachten, wird in der Achse nicht nur eine einfache Quelle von der Stärke S, sondern auch ein Wirbel von der Stärke Γ_1 angenommen. Dabei wird durch den Wirbel die Wirkung eines Leitapparates auf die Strömung ersetzt, der die Richtung der Zuströmung zum Rade vorschreibt. Untersucht wird die Absolutströmung, die, als eine aus der Ruhe unter dem Einfluß der Schwerkraft entstandene Strömung, eine Potentialströmung ist.

2. Die Randbedingungen der Strömung. Das Geschwindigkeitsfeld der Absolutströmung wird in einen Anteil a: Durchfluß-Strömung und in einen Anteil b: Verdrängungs-Strömung zerlegt.

a) Die Durchfluß-Strömung rührt von der Wirbelquelle in der Turbinenachse her und erfolgt so, als ob das Rad still stände. Die Radschaufeln sind Stromlinien. Um jede Schaufel besteht eine Zirkulation Γ_s und um das ganze Rad herum infolgedessen eine Zirkulation $\Gamma_2 = \Gamma_1 + \Sigma \Gamma_s$. Das Unendlichferne ist daher eine Wirbelsenke, deren Senkstärke gleich der Quellstärke der Wirbelquelle in der Turbinenachse ist, während ihre Wirbelstärke von derjenigen in der Turbinenachse verschieden ist und zwar um den Betrag $\Sigma \Gamma_s$. Das Moment des Kreiselrades ist dann: $M = \frac{Q\gamma}{g} \cdot \frac{\Sigma \Gamma_s}{2\pi}$, worin Q die in der Zeiteinheit durch das Rad strömende Wassermenge ist. Die Bestimmung der Durchfluß-Strömung ist im Sinne der Potentialtheorie eine erste Randwertaufgabe.

b) Die Verdrängungsströmung rührt von der Rotation des Schaufelsystems her und besitzt an den Schaufeln selbst nicht nur tangentiale, sondern auch normale Komponenten, die an jedem Punkt mit der Komponente der Geschwindigkeit des Schaufelelementes normal zu diesem selbst übereinstimmen. Aus der Kenntnis dieser Normalkomponenten ist dieser Strömungsanteil zu berechnen und zwar so, daß seine Geschwindigkeiten im Unendlichen verschwinden. Die Bestimmung der Verdrängungs-Strömung ist im Sinne der Potentialtheorie eine zweite Randwertaufgabe.

c) Jeder der beiden Anteile liefert im allgemeinen an beiden Enden jeder Schaufel unendlich große Geschwindigkeiten. Bei ihrer Uebereinanderlagerung aber kann dieser Umstand dadurch beseitigt werden, daß von den drei Konstanten der Durchfluß-Strömung S, Γ_1 und Γ_2 bezw. $\Sigma \Gamma_s$ eine willkürlich gewählt, die beiden anderen aber so bestimmt werden, daß im Zusammenwirken mit der Verdrängungsströmung die Geschwindigkeiten an beiden Enden jeder Schaufel endlich bleiben. (Stoßfreier Eintritt nach der Ausdrucksweise der Turbinentheorie und relativ tangentiales Abströmen von den Radschaufeln.) Natürlich kann man auch zwei Konstanten willkürlich wählen; dann verzichtet man auf stoßfreien Eintritt und kann nur die Geschwindigkeit beim Abströmen von den Schaufeln endlich machen. Diese verschiedenen Fälle haben ihre genauen Analogien in der normalen Turbinentheorie.

3. Die konforme Abbildung des Schaufelrades auf einen Kreis. Durch die Funktion $\zeta = w^n$ werden die n-Schaufeln in der w-Ebene auf eine einzige in der ζ-Ebene abgebildet. Durch eine weitere Abbildung $\zeta = f(z)$ kann die Kontur dieser Schaufel auf den Umfang eines Kreises in der z-Ebene abgebildet werden, so daß der Außenraum der Schaufel Außenraum des Kreises wird. Die Funktion $f(z)$ muß so beschaffen sein, daß sich das Unendlichferne in der ζ- und z Ebene entsprechen, im Außenraum des Kreises keine Singularitäten auftreten, auf dem Kreis jedoch mindestens ein Punkt Windungspunkt wird. Dieser Punkt muß demjenigen Endpunkt der Schaufel entsprechen, von dem die Flüssigkeit abströmt. Ein zweiter Windungspunkt muß auf dem Kreis liegen, wenn auch das Ende der Schaufel, gegen das die Flüssigkeit anströmt, eine Spitze darstellt und wenn auch an diesem Ende endliche Geschwindigkeit verlangt wird. Eine solche Funktion kann in sehr vielen Fällen in geschlossener Form, jedenfalls aber in Form der nachstehenden Reihe gewonnen werden:

$$\zeta = z - \lambda q \cdot e^{i\alpha} + \sum_1^\infty \frac{a_k + i b_k}{(z - \lambda q \cdot e^{i\alpha})^k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Dabei ist $z_0 = \lambda q e^{i\alpha}$ der Mittelpunkt des Bildkreises in der z-Ebene.

4. Ermittlung der Durchfluß-Strömung mit Zirkulation um die Schaufeln. In der z-Ebene kann das komplexe Potential für eine Wirbelquelle im Nullpunkt, deren Strömung einen außerhalb des Nullpunktes liegenden Kreis umfließt, wobei ihr eine Zirkulation um diesen Kreis aufgeprägt ist, leicht angegeben werden. Man braucht dazu nur die Wirbelquelle im Nullpunkt und die unendlich ferne Wirbelsenke am Kreise zu spiegeln und die Zirkulation um den letzteren zu überlagern. Damit erhält man die Durchfluß Strömung in der z-Ebene in dem Ausdruck

$$F_1 = (s - i m) \lg z + (s + i m) \lg \left(z - q \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) e^{i\alpha}\right) - (s + i(m + c)) \lg (z - \lambda q e^{i\alpha}) \quad (2).$$

Durch die oben angegebenen Transformationen kann dieser Ausdruck in einen für die w-Ebene gültigen verwandelt werden, der damit die entsprechende Strömung um die n-Schaufeln darstellt. Dies braucht aber nicht für alle zu beantwortenden Fragen wirklich ausgeführt zu werden.

5. Ermittlung der Verdrängungsströmung. Nennt man die Normal- und Tangentialkomponente der Geschwindigkeit an den Schaufeln in der w-Ebene v_n und v_t, diejenigen am Kreise in der z-Ebene c_n und c_t und faßt man die Transformation der w- auf die z-Ebene in der Gleichung $w = \varphi(z)$ zusammen, so ergibt sich für zusammengehörige Punkte einfach:

$$v_n \left|\frac{dw}{dz}\right| = c_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3). \qquad v_t \left|\frac{dw}{dz}\right| = c_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wo $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ der Absolutwert der Ableitung der Abbildungsfunktion ist. Dies folgt aus den Eigenschaften der konformen Abbildung. An Hand der ersten dieser beiden Gleichungen kann man eine c_n-Verteilung auf der Kreisperipherie errechnen, die nach Vornahme der Transformation $w = \varphi(z)$ die richtige v_n-Verteilung an den Schaufeln liefert. Andererseits aber läßt sich das komplexe Potential der Verdrängungsströmung bezw. die von ihr herrührende Geschwindigkeit in der z-Ebene in Form der nachstehenden Reihen ansetzen:

$$F_2 = \sum_1^\infty \frac{g_k + i f_k}{(z - \lambda q e^{i\alpha})^k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5), \qquad \frac{dF_2}{dz} = -\sum_1^\infty k \cdot \frac{g_k + i f_k}{(z - \lambda q e^{i\alpha})^{k+1}} \quad . \quad . \quad (6).$$

Setzt man in der letzteren die Kreisgleichung $z = q(\lambda e^{i\alpha} + e^{i\varphi})$ ein und ersetzt $\frac{dF_2}{dz}$ durch $(c_n - i c_t) e^{-i\varphi}$, so ergibt sich nach Trennen von Reellem und Imaginärem:

$$c_n = -\sum_1^\infty k (g_k \cos k\varphi + f_k \sin k\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Damit ist c_n als Fouriersche Reihe dargestellt. Man hat nun die nach Gl. (3) errechnete c_n-Verteilung ebenfalls in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln und findet dann durch Vergleich die Koeffizienten des Ansatzes 5.

Es sei bemerkt, daß das geschilderte Verfahren ganz allgemein bei ebenen Problemen den Weg zur Lösung zweiter Randwertaufgaben für die Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ bietet, und zwar für alle Berandungen, die sich auf den Kreis abbilden lassen. Daß die Lösung eindeutig ist, ist bekannt.

6. Uebereinanderlagerung der Durchfluß- und Verdrängungs-Strömung. Das komplexe Potential für die gesammte Absolutströmung lautet nun in der z-Ebene $F = F_1 + F_2$. Differentiation liefert

$$\frac{dF}{dz} = \frac{s - i m}{z} + \frac{s + i m}{z - q\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)e^{i\alpha}} - \frac{s + i(m + c)}{z - q\lambda e^{i\alpha}} - \sum_1^\infty k \frac{g_k + i f_k}{z - \lambda q e^{i\alpha})^{k+1}}.$$

Dieser Ausdruck muß für diejenigen Kreispunkte, die Windungspunkte sind, also den Schaufelenden entsprechen, zu Null werden, damit nach Multiplikation mit der Ableitung der Abbildungsfunktion die Geschwindigkeiten an den Schaufelenden in der w Ebene endlich bleiben. Dies liefert die Gleichungen zur Bestimmung von einer oder zweier der Konstanten S, Γ_1 und Γ_s entsprechend den Ausführungen in Absatz 2c.

7. Ergebnisse. Damit ist das komplexe Strömungspotential der Absolutströmung durch das rotierende Kreiselrad hindurch vollständig bestimmt. Aus ihm kann die in erster Linie interessierende Leistungsaufnahme des Kreiselrades (d. h. die Konstante c für die z-Ebene bezw. $n \cdot c$ für die w-Ebene) berechnet werden. c und damit auch m ergibt sich bei gegebener Schaufelform (die auch durch das Radienverhältnis mit bestimmt ist) als abhängig von der Schaufelzahl. Daß auch m von der Schaufelzahl abhängt, bedeutet, daß ein Leitapparat für stoßfreien Gang je nach der Schaufelzahl des rotierender Rades verschieden beschaufelt werden müßte. Hierin liegt ein Analogon zu der in den Strömungslehre bekannten »Ueberkrümmung« einer Kontur bei glattem Anströmen aus einer gegebenen Richtung. Ueber diese beiden Ergebnisse hinaus kann das Gesamtbild der Geschwindigkeitsverteilung errechnet werden und zwar zunächst das Absolutbild, durch Hinzufügen von $-r\omega$ aber auch das Relativbild. Hierbei ergeben sich unter Umständen Singularitäten im Schaufelraum (Strömungsumkehr).

Durchgeführt ist die Rechnung [1]) bereits für den einfachsten Fall einer Kreiselpumpe mit rein radialen Schaufeln mit beliebigem Radienverhältnis unter Benutzung der Trans-

[1]) Siehe Festschrift anläßlich des 100jährigen Bestehens der Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe.

formation $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{q}{\lambda} + \frac{q^2}{z - q\lambda}\right)$, welche einen Kreis auf eine durch den Nullpunkt gehende gerade Linie abbildet, und der nachfolgenden Transformation $\zeta = w^n$. Ganz ähnlich lassen sich einige speziell gekrümmte Schaufeln behandeln, durch Transformationen, die den Kreis auf gerade Linien oder Kreisbögen, die am Nullpunkt vorbeigehen, abbilden. In Arbeit ist die Untersuchung eines Schaufelrades mit ganz allgemein gekrümmten Schaufeln unter Benutzung der Königschen Abbildung eines Gitters auf die positive Halbachse. (Vergl. Zeitschrift für angewandte Mathematik u. Mechanik, Bd. 2, Jahrg. 1922, Heft 6). Nach der gleichen Methode kann selbstverständlich eine parallelkränzige Turbine behandelt werden; dabei wird das Unendlichferne Wirbelquelle und die Achse Wirbelsenke. 584

6. Grenzen der Übertragbarkeit der Versuchsergebnisse und Modellähnlichkeit bei praktischen Flußbauversuchen.

Von **H. KREY** in Berlin.

Die wasserbaulichen Modellversuchsanstalten, soweit sie nicht lediglich Lehrzwecken der Hochschulen oder der reinen wissenschaftlichen Forschung dienen, wie beispielsweise bei der Nachprüfung eines einzelnen theoretisch ermittelten Gesetzes, haben die Aufgabe, durch den Versuch im Kleinen die Wirkungsweise der geplanten Bauten festzustellen und die günstigsten Bauweisen zu ermitteln. Dazu ist es erforderlich, daß das Modell der Wirklichkeit geometrisch vollkommen ähnlich ist und daß die Wasserbewegung bei beiden mechanisch ähnlich ist, so daß man maßstäblich von dem Modell auf die Wirklichkeit schließen kann.

Mechanische Aehnlichkeit ist nun leider unter sehr verschiedenen Verhältnissen zu erwarten, je nachdem neben den Trägheitskräften nur Schwerkräfte oder anderseits nur Reibungskräfte vorhanden oder maßgebend sind.

Im ersteren Fall ist mechanische Aehnlichkeit (Froudesche Modellähnlichkeit) dann vorhanden, wenn

die Bezugszahl $\frac{v^2}{g\,l}$ oder rd. der Bezugswert $\frac{v^2}{l}$

für Modell und Natur gleich ist, das heißt, wenn die entsprechenden Geschwindigkeiten sich wie die Wurzel aus dem Modellmaßstabe λ, also wie $\sqrt{\lambda}$ verhalten. Für die Uebertragung der Versuchsergebnisse auf die Natur ergeben sich die Maßstäbe: der Abmessungen (Druckhöhen, Wellenhöhen) $= \lambda$, der Kräfte $= \lambda^3$, der Zeiten und Geschwindigkeiten $= \sqrt{\lambda}$, der Wassermengen $= \lambda^{2,5}$.

Im zweiten Falle ist mechanische Aehnlichkeit (Reynoldssche Modellähnlichkeit) dann vorhanden, wenn

die Kennzahl[1]) $v\,l\,\varrho$ oder rd. der Kennwert $v\,l$

für beide Ausführungen gleich ist, d. h. wenn die entsprechenden Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Abmessungen verhalten. Für die Uebertragung der Versuchsergebnisse auf die Natur ergeben sich dann die Maßstäbe: der Abmessungen $= \lambda$, der Zeiten $= \lambda^2$, der Geschwindigkeiten $= \frac{1}{\lambda}$, der Druckhöhen $= \frac{1}{\lambda^2}$, der Kräfte $= 1$.

Für praktische Wasserbau- und Schiffbauversuche kann diese letztere Modellähnlichkeit meist nicht eingehalten werden; sie dient nur für die nachträgliche Untersuchung des etwaigen störenden Einflusses der Reibung.

Wenn gleichzeitig Schwerkräfte und Reibungskräfte von Einfluß sind, dann ist genau genommen überhaupt keine mechanische Aehnlichkeit der Bewegung zwischen beiden möglich. Bei dem überwiegenden Einfluß der Schwerkräfte auf die Bewegung bei allen praktischen Wasserbau- und Schiffbauaufgaben ist es zulässig und üblich, dem Versuch

[1]) ϱ Ist ein von der Temperatur abhängiger Zähigkeitsbeiwert. Er beträgt für Wasser

bei	0	5	10	15	20	25^0 C
	0,68	0,79	0,92	1,05	1,19	1,32 s/m^2

und bei der im Mittel in der Natur vorhandenen Wasserwärme (von $13{,}2^0$) $= 1$. Die Kennzahl ist $=$ der $\frac{1{,}2}{10^6}$ fachen Reynoldsschen Zahl, und für den Gebrauch handlicher als diese.

zuerst die Froudesche Modellähnlichkeit zugrunde zu legen und den Einfluß der Reibung nachträglich durch besondere Versuche zu ermitteln oder auf Grund früherer Versuche oder Erfahrung durch Rechnung abzuscheiden.

Es ist das ein bewußtes Abweichen von der wissenschaftlich genauen Modellähnlichkeit. Trotzdem sind die Ergebnisse gut brauchbar, solange man den Einfluß der Reibung einwandfrei mit genügender Annäherung bestimmen kann.

Ein weiteres Abweichen von der Modellähnlichkeit ist es, wenn man den natürlichen Atmosphärendruck meist nicht im Modellmaßstabe heruntersetzt, oder wenn man bei ausgedehnten Bauobjekten (Flüssen, Kanälen usw.) nur Teilstücke im Modell darstellt. Man muß dann beachten, daß die Grenzen der Uebertragbarkeit dann erreicht sind, wenn im Modell an irgend einer Stelle ein Unterdruck gleich dem im Modellmaßstab verkleinerten Atmosphärendruck auftritt, oder wenn die von dem natürlichen Abschluß des Modells reflektierte Welle wieder an der Meßstelle ankommt.

Besondere Schwierigkeit bietet die Ausführung praktischer Flußbauversuche für größere Ströme, da man bei ihnen sehr oft gezwungen ist, auch von der geometrischen Aehnlichkeit des Modells erheblich abzuweichen, wenn man größere Unähnlichkeit der Bewegung vermeiden will.

Dazu zwingt in erster Linie die Rücksichtnahme auf die Strömungsart. Wenn auch im Modell turbulente Strömung vorhanden sein soll (wie in der Natur), dann muß nach der Erfahrung der Kennwert $v\,r$ größer als etwa 0 007 m²/s sein (r = hydraulischer Radius oder rd. mittlere Tiefe). Setzt man darin v rd. $= k\sqrt{r\,i}$ (i = Gefälle), dann kann man die mindest erforderliche Tiefe $r = \left(\frac{0\,007}{k\sqrt{i}}\right)^{2/3}$ und den geringsten Tiefmaßstab $\frac{r}{R} = \frac{1}{n}$ ermitteln, der meist größer ist als der größtmögliche Maßstab $\frac{1}{m}$ der Längen und Breiten des Modells.

Weiter ist die Rücksichtnahme auf die Strömungsgröße bestimmend. Wenn die mittlere Wassergeschwindigkeit v im Modell wie in der Natur bei allen größeren Strömen und Flüssen des Flachlandes unter der größten (Grund-) Wellengeschwindigkeit liegen soll, dann muß

$$v \text{ sicher} < \text{als } \sqrt{g\,r} \text{ sein}$$

mit $v = k\sqrt{r\,i}$ ergibt sich dann als Bedingung für das Gefälle

$$i < \frac{g}{k^2}$$

(der Beiwert k ist für das Modell und die Natur verschieden).

Anderseits ist das Modellgefälle von dem Geschiebemaßstab des Modells abhängig, den wir bei dem ohnehin schon sehr feinen Geschiebe der großen Ströme des Flachlandes meist nicht gleich dem Tiefenmaßstab $\frac{1}{n}$ wählen können, ohne die Eigenschaften des Geschiebes wesentlich zu ändern. Nach den Ergebnissen früherer Versuche muß bei einem Korndurchmesser d die Tiefe

$$t \text{ mindestens} \geq \frac{d}{20\,i} \text{ bis } \frac{d}{8\,i}$$

sein, wenn ähnlich wie in der Natur auch im Modell bei allen Wasserständen (lebhafte) d. h. meßbare Geschiebebewegung vorhanden sein soll.

Dadurch ist das für größere geschiebeführende Flüsse erforderliche Modellgefälle in verhältnismäßig engen Grenzen eingefaßt.

$$\frac{g}{k^2} > i > \frac{8\,d}{t} \left(\text{bzw. } \frac{8\,d}{r}\right)$$

Daraus kann man den Gefällmaßstab des Modells

$$\frac{i}{J} = a \text{ wählen.}$$

Rücken die beiden Grenzen nahe zusammen oder überschneiden sie sich, dann kann man nur durch eine Vergrößerung des ganzen Modells oder wenigstens des Tiefenmaßstabes zu einem brauchbaren Versuchsmodell gelangen, aus dem man Schlüsse für das Verhalten der naturgroßen Ausführung ziehen kann. Eine solche Verzerrung der Tiefe des Modells ist bei den großen Breiten der Flachlandströme bis zu einem gewissen Grade zulässig.

Indessen leidet natürlich durch die Verzerrung und durch jedes Abweichen von der geometrischen und mechanischen Modellähnlichkeit die Genauigkeit der Uebertragung.

Als Uebertragungsmaßstäbe würden sich ergeben nach den obigen Ausführungen

$$\text{für die Längen und Breiten} \ldots\ldots\ldots = m$$
$$\text{für die Wassertiefen, Spiegelhöhen usw.} = n$$
$$\text{für das Gefälle} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{a}$$

Berücksichtigt man weiter, daß nach der Erfahrung der Geschwindigkeitsbeiwert k etwa mit der Potenz $\frac{1}{8}$ der Kennzahl $(v\,r\,\varrho)$ wächst, und daß die Menge des stündlich durch die Breiteneinheit wandernden Geschiebes nach den Versuchserfahrungen im Mittel etwa mit der 6ten Potenz der Schleppkraft $\gamma\,t\,i$ zunimmt, dann ergibt sich weiter der Maßstab der Uebertragung

$$\text{für die Geschwindigkeit } p = \text{rd } n^{5/7}\ a^{-4/7}$$
$$\text{für die Wassermenge } \ldots\ s = \text{rd. } m\,n^{12/7}\ a^{-4/7}$$
$$\text{für die Geschiebemenge } n = \text{rd. } m\,n^{6}\ a^{-6}$$

Der Zeitmaßstab spielt bei der Uebertragung der Versuchsergebnisse von Flußbauversuchen keine große Rolle, da es weniger auf die zeitlichen Wirkungen, sondern mehr auf den schließlichen Dauerzustand der Bettausbildung, Ufergestaltung usw. ankommt. Für die mittleren Wassergeschwindigkeiten würde er sich etwa ergeben zu

$$\tau = m\,n^{-5/7}\ a^{4/7}$$

Praktische Flußbauversuche für größere geschiebeführende Flüsse erfordern noch mehr als andere Modellversuche sorgfältige Ueberlegung der zulässigen Modellmaßstäbe und eine dauernde wissenschaftliche Prüfung der Genauigkeit und der Grenzen der Uebertragbarkeit der Ergebnisse. 588

7. Druckmessungen an umströmten Zylindern.

Von **F. EISNER** in Berlin.

Uebersicht. Im Jahre 1913 und in den folgenden Jahren sind in der Versuchsanstalt für Wasser- und Schiffbau, Berlin, Widerstands- und Druckmessungen an umströmten Zylindern vorgenommen worden. Eine systematische Bearbeitung dieser bisher unveröffentlichten Messungen ermöglicht einige neuartige Aussagen insbesondere über die Druckverteilung (ebenes Problem) an der Zylindermantelfläche im Gebiete Reynoldsscher Kennzahlen $R = \frac{V\,d}{\nu}$[1]) zwischen etwa 10^3 und 10^6, also beiderseits des charakeristischen Abfalles des Widerstandsbeiwertes. Die spärlichen von andere Seite[2]) erhaltenen Ergebnisse, die bis jetzt aber nur im unteren Gebiet dieser Reynoldsschen Zahlen vorlagen, zeigen in diesem Gebiet gute Uebereinstimmung. Unterhalb des Widerstandssprunges gestattet die Prandtlsche Grenzschicht-Theorie, wenn der Rechnung die gemessene Druckverteilung zugrundegelegt wird, eine gut mit der Beobachtung übereinstimmende Bestimmung der Stelle der »Ablösung« und des »Ablösungswinkels«[3]), während die Oseen-Zeilonsche Theorie[4]) unter gewissen Annahmen eine nicht absolut, aber in ihrem ganzen Charakter den Messungen entsprechende Druckverteilung und einen Widerstand zu errechnen gestattet.

[1]) V = Geschwindigkeit der ungestörten Strömung senkrecht zu den Erzeugenden des Kreiszylinders vom Durchmesser d; ν = Zähigkeitszahl

[2]) Hiemenz, Diss. Göttingen 1911, Messung bei $R \simeq 1{,}5 \cdot 10^4$; Lafay, 1912; Jacob, La Résistance de l'Air et l'Expérience, Encycl. Scient (Libr. Oct. Doin), Paris 1921. Der im Vortrag näher durchgeführte Vergleich und die Kritik der Meßverfahren ist in dem vorstehenden Auszug unterdrückt. — Nach Diskussionsbemerkung von Hopf zu obigem Vortrag hat Ermisch in Aachen kürzlich ebenfalls höhere Reynoldssche Zahlen erreicht; die Ergebnisse sollen sich völlig mit den oben mitgeteilten decken (im Druck in den Mitteil. des Aachener Aerodyn. Inst.) Die Berliner Versuche führte zum größten Teil Dr. ing. Lacmann aus.

[3]) S. in Vervollkommnung der Hiemenzschen Rechnung (l. c.) Pohlhausen, diese Zeitschrift 1921, S. 252 ff.

[4]) S. Zeilon, On potential problems in the theory of fluid resistance, Kungl. Sv. Vetenskapsakad. Handl. Tredje Ser. Bd. 1, Stockholm 1924, sowie Proceed. Intern. Congr. f. Appl. Mechanics Delft 1924 S. 365 ff.

Auf Grund der Meßergebnisse und der Grundlagen der Prandtlschen und Oseenschen Theorien wird ein neuer Ansatz vorgeschlagen, durch den vielleicht die Vorteile beider Theorien vereinigt werden können.

Meßeinrichtung und einige charakteristische Ergebnisse. Der in aufrechter Lage am Schleppwagen befestigte Kreiszylinder wird mit bestimmter Geschwindigkeit durch das ruhende Wasser der 150 m langen Versuchsrinne (rd. 8 m obere Breite, 4,20 m mittlere Tiefe) geschleppt; der Einfluß der freien Wasseroberfläche und der Zylinderendflächen ist durch genügend große, zugeschärfte Abdeckplatten ausgeschaltet; in der Mittelebene[1]) zwischen den genügend weit voneinander entfernten Abdeckplatten wird durch rings am Umfang angebrachte Durchbohrungen der Mäntelfläche der Druck auf Wassermanometer übertragen und abgelesen. In Abb. 1 sind einige charakteristische Druckbilder an denjenigen

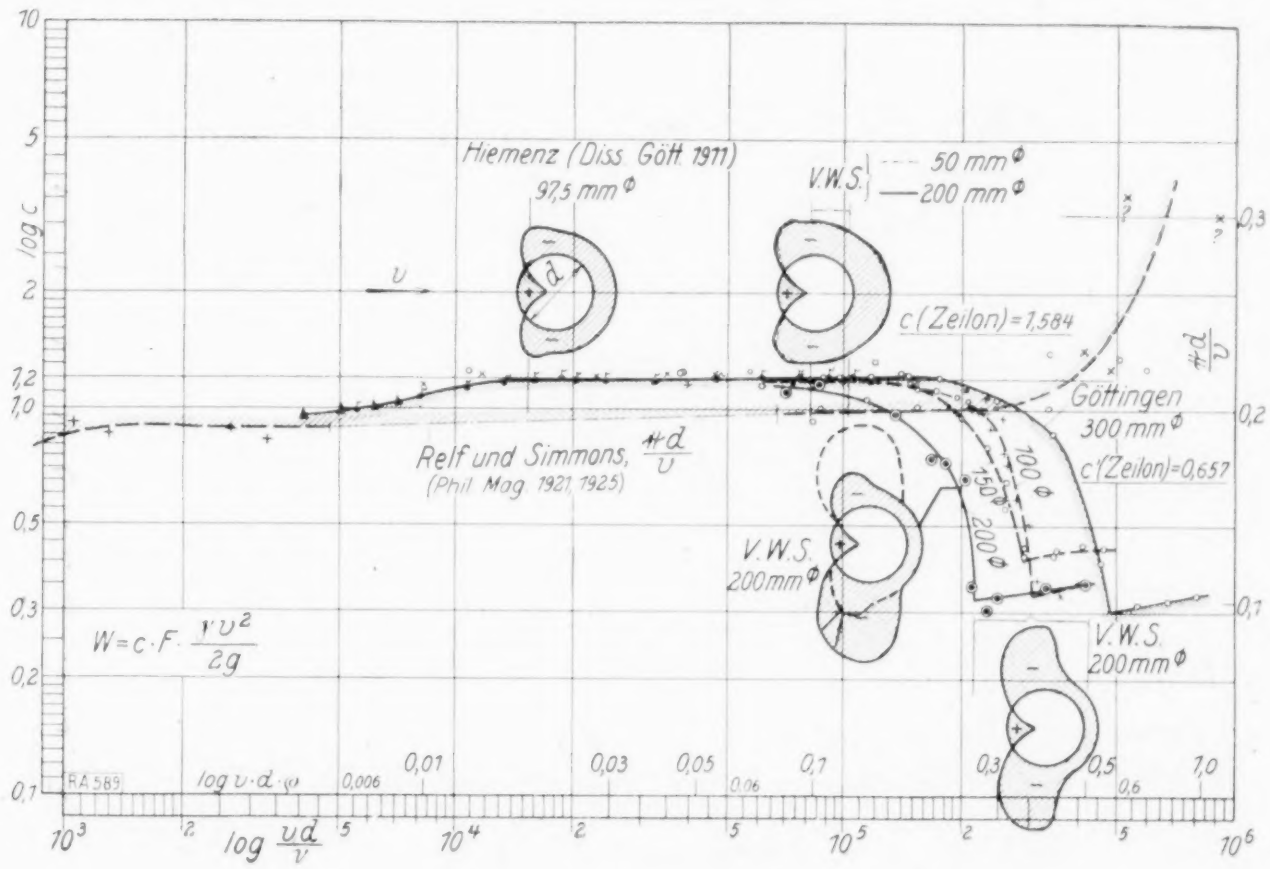


Abb. 1.

Stellen der Widerstandskurve (doppeltlogarithmische Auftragung des Widerstandsbeiwertes über der Reynoldsschen Zahl) eingezeichnet, an denen sie gemessen worden sind. In dem ganzen Gebiet nahezu konstanten Beiwertes unterhalb des Widerstandsabfalles ist auch die Druckverteilung nahezu gleichbleibend. Die Werte von Hiemenz bei $\sim 1{,}5 \cdot 10^4$ und die mit Zylindern verschiedenen Durchmessers erhaltenen Werte bis hinauf zu etwa $1{,}1 \cdot 10^5$ stimmen innerhalb der Meßgrenzen sehr gut überein. Bis in diese Gegend etwa herrschen im Zylinderkielwasser wahrscheinlich diskrete Wirbelgebilde (v. Kármánsche Wirbelstraße[2]) also durchaus geordnete, zum Teil periodische Vorgänge. Deutlich macht sich in der Gegend der Grenzschichtablösung der Druckwiederanstieg bemerkbar. Oberhalb des Widerstandsabfalles[3]), nachdem also die Grenzschicht »turbulent geworden« ist und die Vorgänge

---

[1]) Beim ersten Zylinder (50 mm Dmr.) 7, je um 30^0 versetzte Anbohrungen; der Zylinder wurde dann zweimal je um 10^0 zur Fahrtrichtung weiter verdreht, sodaß für alle 10^0 am Umfang Ablesungen vorlagen. Bei den größeren Zylindern, die während ein und derselben Fahrt alle Ablesungen (je 10^0 am Umfang auseinander liegend ergaben, waren die Anbohrungen auf mehrere dicht beieinander liegende symmetrisch angeordnete Ebenen in der Mitte verteilt.

[2]) S. wegen der „Existenz" und einiger allgemeinerer Ausblicke Lichtenstein Math. Z. 1925 Bd. 23 1/2 Heft S. 89 ff. — Auf die im Vortrag gegebene Kritik der in Bild 1 eingezeichneten Kurve für die Periode der Kielwasserwirbel nach Relf und Simmons Phil. Mag. 1921 und 1925 wird hier nicht näher eingegangen.

[3]) Die Widerstandsbeiwerte unterhalb und oberhalb des Abfalles stimmen mit den Göttinger Messungen genau überein (auch der vielleicht vorhandene langsame Anstieg oberhalb); daß dagegen der Abfall selbst an anderer Stelle als in Göttingen liegt und bei verschiedenen Zylinderdurchmessern an verschiedener Stelle, ist vielleicht auf möglicherweise vorhandene geringe Unterschiede der Rauhigkeit

im Kielwasser höchstens als quasistationär, richtiger wohl als von statistischen Gesetzen beherrscht anzusehen sind[1]), ist auch das Druckbild in ganz charakteristischer Weise verändert; es bleibt wiederum im ganzen Bereich des fast konstanten Widerstandsbeiwertes nahezu unverändert, Wesentlich sind die sehr großen seitlichen Unterdrucke (sie entsprechen auf der Vorderseite nahezu der Potentialtheorie idealer Flüssigkeiten), die rasch zu einem Kielwasserunterdruck wiederansteigen, dessen Absolutbetrag wesentlich kleiner ist, als unterhalb des Widerstandsabfalles[2]). Im Uebergangsgebiet pendelt die Druckverteilung; von den ungleichen seitlichen Unterdrucklappen liegt der größere bald auf der einen, bald auf der anderen Seite ohne sichtliche Bevorzugung. Die absolute Größe des Unterdruckes im »hinteren Staupunkt« zeigt, über der Reynoldsschen Zahl aufgetragen, ähnlichen Verlauf wie der Widerstandsbeiwert (Abb. 2 rechts unten).

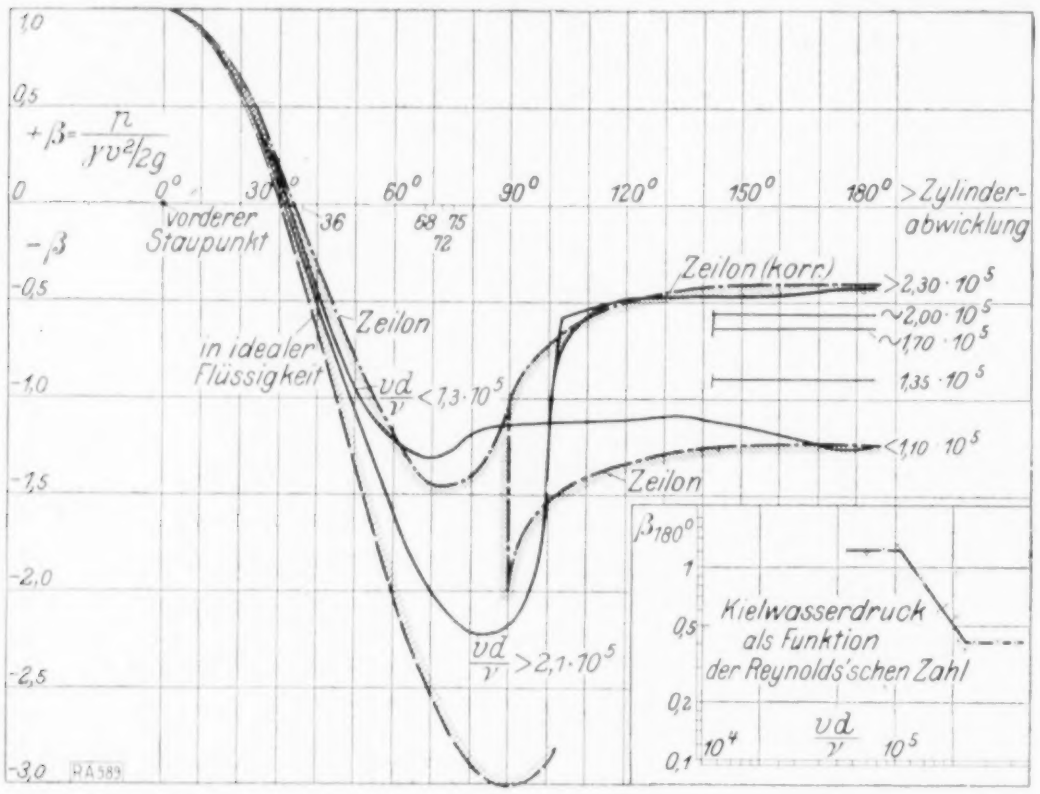


Abb. 2.

Abb. 2 zeigt über dem abgewickelten Zylinderumfang die Druckverteilung gemäß der Potentialtheorie idealer Flüßigkeiten, nach den Messungen unterhalb und oberhalb des Widerstandssprunges und nach der Oseen-Zeilonschen Theorie.

Folgerungen. Die Oseensche Theorie[3]) sagt unter Berücksichtigung der sog. »halbquadratischen« Glieder mit den dort gemachten Annahmen nach dem Grenzübergang zur Reibung $\mu = 0$ für das ebene Problem aus, daß die Strömung bis zu den Stellen $\pm \pi/2$ vorn am Körper gleitet und dann außerhalb eines bis ins Unendliche reichenden Streifens als Potentialströmung verläuft, dessen Begrenzungen parallel zur Strömungsrichtung sind und den Körper tangieren. Nur auf der Rückseite haftet die Flüßigkeit am Körper und innerhalb des Streifens herrschen selbst bei kleinsten Reynoldsschen Zahlen Wirbelbewegungen. Es ergibt sich nach Zeilon rechnerisch die auf Abb. 2 dargestellte Druckverteilung bzw. der in Abb. 1 angedeutete Widerstandsbeiwert $c \cong 1{,}58$. Aus der Forderung stetigen Druckverlaufes auch beim Durchgang durch die Diskontinuitätsfläche und unter der Annahme einer Wirbelverteilung gleicher Wahrscheinlichkeit im Kielwasser errechnet Zeilon halb empirisch die »korrigierte« Druckverteilung und $c \cong 0{,}66$ (vergl. Abb.). Ein Vergleich dieser Rechnung mit den Meßwerten[4]) und die Ueberzeugung von der Berechtigung der Prandtlschen Anschauung bei Flüßigkeiten mit kleiner Reibung führt zu einem neuen Ansatz, der auch rein mathematisch nicht ohne Interesse sein dürfte. Man behält hiernach, dem Oseenschen Gedanken folgend, in den Differentialgleichungen die halbquadratischen

---

der Oberflächen zurückzuführen. Für diese Auffassung spricht es auch, daß der Widerstandsabfall eines absichtlich rauh gemachten Zylinders schon bei $R \cong 10^5$ liegt; bei diesem steigen aber in merkwürdiger und bisher unaufgeklärter Weise die Widerstände bei weiter wachsenden R sofort in stetiger Kurve bis nahezu zur alten Höhe wieder an (durch viele Einzelmessungen zu verschiedenen Zeiten immer wieder bestätigt).

[1]) S. v. Kármán, Vorträge der Hydro- und Aerodynamik, Innsbruck 1922 (Springer 1924) S. 136, für den dreidimensionalen Fall der Kugel.

[2]) Nach diesem Druckbild gewinnt man übrigens auch eine ungefähre Vorstellung von den Druckverhältnissen und dem großen Quertrieb beim rotierenden Zylinder, während beim nur translatorisch bewegten Zylinder die großen seitlichen Lappen den Widerstand in Fahrtrichtung wegen der kleinen Flächenprojektion kaum beeinflussen

[3]) S. Annal der Physik. 1915 oder Vorträge, Innsbruck 1922 S. 123 vergl.[1]), sowie die Arbeiten Oseens im Arkiv für mat. astr. och fys. Ferner Zeilon (*l. c.*).

[4]) Zeilon konnte seine Rechnung nur mit den Messungen von Lafay und Jacob vergleichen.

Glieder bei, fordert aber die Randbedingung für die Vorderseite des Körpers $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V \cdot \cos(n, x)$ nicht bei $r = \frac{d}{2}$, sondern bei $r = \frac{d}{2} + \delta$, wobei δ die Dicke einer Grenzschicht im Prandtlschen Sinne ist und ihrerseits erst durch das Druckgefälle der Oseenschen Strömung außerhalb und durch die entsprechende Grenzschichtgleichung bestimmt wird. Man schiebt also nach dem neuen Gedankengang zwischen die Oseensche Strömung und den Körper die Grenzschicht genau so dazwischen, wie man bei der Prandtlschen Theorie die Grenzschicht zwischen die Potentialströmung der idealen Flüßigkeit und den Körper legt. Dabei bleibt zunächst die wohl nicht ganz einfache Frage offen, wie ein Zusammenschluß der Grenzschicht mit dem Oseenschen Kielwasserstreifen[1]) erfolgen kann; denn das Haften an der Rückseite im Sinne Oseens $\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0\right)$ darf dann nicht mehr an den Stellen $\pm \pi/2$, sondern an der Stelle der Ablösung beginnen, bis zu der ja auch nach der üblichen Grenzschichttheorie das »Totwasser« eindringt. Hier wird man experimenteller Aussagen wohl nicht entraten können. — Oberhalb des Widerstandssprunges, wenn also die Grenzschicht von einer, auch nach dem neuen Gedankengang ungefähr berechenbaren Stelle an »turbulent wird« und von Ablösung und Ablösungsstelle eigentlich keine Rede mehr sein kann, sondern, falls man nicht stellenweise von drei Gebieten wird reden müssen, Grenzschicht und Kielwasser zusammen ein turbulentes Gebiet bilden, kann man natürlich in der angedeuteten Weise nicht mehr vorgehen. — Der aufgezeigte Gedankengang zur Verschmelzung der Vorteile der Prandtlschen und Oseenschen Theorien ist zunächst nur ein Vorschlag, der noch gründlicher Durcharbeitung und Klarstellung der mathematischen Natur mehrerer Einzelfragen bedarf, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann; vielleicht kann bei späterer Gelegenheit mehr darüber gesagt werden[2]). Aber auch wenn der angedeutete Weg sich als gangbar und befriedigender als die bisherigen Lösungen erweisen sollte, so wird auch damit noch nicht viel erreicht sein: Eine Theorie zäher Flüßigkeiten wird wahrscheinlich immer experimentelle Angaben unbedingt in sich aufnehmen und als gleichberechtigt mitverarbeiten müssen, wenn sich ihre Aussagen mit den Beobachtungen decken sollen. 589

8. Das Problem der Turbulenz im Kreisrohr.[3])

Von **H. LORENZ** in Danzig.

Das Druckgefälle $dp:dz$ in einem wagerechten Rohr vom Halbmesser r_0 ist ganz allgemein abhängig von der Schubspannung τ_0 am Rande, so zwar, daß unter Einführung der radial veränderlichen Geschwindigkeit v mit dem Mittelwert w und der Reibungsziffer (Zähigkeit) μ

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{2\tau_0}{r_0} = -\frac{2\mu}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{8\mu w}{r_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist, entsprechend der bekannten parabolischen Geschwindigkeitsverteilung bei laminarer Strömung. Im Falle einer idealen Flüssigkeit vom spez. Gewicht γ wäre kinematisch ein Randwirbel von der Dicke h mit linearem Geschwindigkeitsanstieg und ein Kernstrom mit konstanter Geschwindigkeit v_0 möglich, für die mit der Zähigkeit μ wegen (1)

$$\frac{dp}{dz} = \frac{2\mu v_0}{r_0 h} \quad \text{und} \quad w = v_0\left(1 - \frac{h}{r_0} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{r_0^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

---

[1]) Ueber die aus der Forderung der Eindeutigkeit der Lösung des Intregal-Gleichungsproblems sich ergebenden Bedingungen s. Noether, Ueber eine Klasse singulärer Intregalgleichungen Math. Annalen 82, 1921 S. 42 ff.

[2]) Um zu zeigen, wie sich bei Zylindern, die mit freier Wasseroberfläche geschleppt wurden, die Oberfläche ausbildet (Stau, Absenkung, Wellenbildung), sind die Höhen-schichtlinien am Stereoautographen ausgewertet worden. Im Vortrag wurden solche Bilder für verschiedene Schleppgeschwindigkeiten und auch für schiffsähnliche Körper gezeigt; sie werden bei späterer Gelegenheit veröffentlicht werden. Auch über Schiffswellen soll im Anschluß an Hopf, Hogner, Havelock und Krey, insbesondere in beschränktem Wasser, später berichtet werden.

[3]) Vergl. H. Lorenz: »Das Turbulenzproblem für das gerade Kreisrohr«. Phys. Zeitschr. 1925, Heft 16.

gelten würde. Mit Rücksicht auf die Wirbelablösung, welche den linearen Anstieg in der Randschicht stört, schreiben wir für den wirklichen Vorgang statt dessen mit einer neuen Reibungsziffer μ_0 und zwei Beiwerten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$

$$\frac{dp}{dz} = 2\,\frac{\tau_0\, v_0}{r_0\, h}; \qquad w = v_0\left(1 - \varkappa_1\,\frac{h}{r_0} + \varkappa_2{}^2\,\frac{h^2}{r_0{}^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,a).$$

Andererseits gilt für den Kernstrom bei gleichem Druckgefälle mit der Rauhigkeitsziffer λ_0, die wir zunächst als konstant ansehen,

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda_0\,\gamma\, v_0{}^2}{2\,g\,r_0}; \quad \text{also} \quad v_0\, h = \frac{4\,\mu_0\, g}{\lambda_0\,\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

so daß also die Grenzschichtdicke h mit wachsendem v_0 abnimmt. Durch Ausschaltung von v_0 aus (2a) und (3), sowie unter Einführung der Reynoldsschen Zahl

$$R = \frac{\gamma\, w\, r_0}{g\,\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

erhalten wir mit $r_0 : h \geq 1$

$$\frac{r_0}{h} = \frac{1}{2}\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\,\frac{\lambda_0\, R}{4}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\varkappa_1 + \frac{\mu}{\mu_0}\,\frac{\lambda_0\, R}{4}\right)^2 - \varkappa_2{}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Nun ist für den kritischen Uebergangszustand $R = R_0$ aus der Laminarströmung, in dem die entsprechende Wirbelung sich in endliche Wirbelballen auflöst, unter Verschwinden der Wurzel

$$\lambda\, R_0 = 16\,; \qquad r_0 : h = 1\,; \qquad \varkappa_2 = 1.$$

Durch diese drei Grenzbedingungen sind die drei Festwerte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und μ_0 bestimmt und wir erhalten schließlich für die Aenderung des Widerstandsbeiwertes $\lambda = \frac{2\,g\,r_0}{\gamma\, v^2}\,\frac{dp}{dz}$

$$\lambda\, R = 4\,\frac{R_0}{R}\left\{2 + \frac{\sqrt{\lambda_0\, R_0}}{4}\left(\frac{R}{R_0} - 1\right) + \sqrt{\left[2 + \frac{\sqrt{\lambda_0\, R_0}}{4}\left(\frac{R}{R_0} - 1\right)\right]^2 - 4}\right\}^2 \quad . \quad . \quad (6)$$

mit der Asymptote

$$\lambda\, R = 16\,\sqrt{\lambda_0\, R_0} - 2\,\lambda_0\, R + \lambda_0\, R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a).$$

Der Beiwert λ enthält also nur als Konstante die in der kritischen Reynoldsschen Zahl R_0 steckende Zähigkeit μ und die Rohrrauhigkeit λ_0.

Schließlich erhellt, daß alle verschiedenen Werten λ_0 zugehörigen Kurven der $\lambda\, R$ als Funktion von R im kritischen Punkt R_0 und $\lambda\, R_0 = 16$ zusammenlaufen und Asymptoten besitzen, welche die Hyperbel

$$\lambda\, R = \frac{64\, R_0}{2\, R_0 - R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

einhüllen. 574

9. Über die Fortbildung des Turbinenprinzips.[1])

Von **H. FÖTTINGER** in Charlottenburg.

Das Turbinenprinzip (die Energieübertragung durch kontinuierliche Ablenkung strömender Medien unter Zuhilfenahme von Trägheitskräften) hat in den letzten 20 Jahren einige auch theoretisch bemerkenswerte Fortbildungen erfahren, die über die gewöhnliche Verbindung eines Laufrades mit 1 oder 2 Leiträdern erheblich hinausgehen, und zwar sowohl inbezug auf die dabei verwendeten mechanisch-physikalischen Prinzipien, als inbezug auf die praktisch erreichten Wirkungsgrade, die auf Grund irriger Theorien heute noch vielfach für unmöglich erklärt werden.

1. Turbinengetriebe (Turbo-Transformatoren) zur Arbeitsübertragung und Umsteuerung von schnell- auf langsamlaufende Wellen sind seit 1903 vom Verfasser zur Ueberbrückung der Kluft zwischen Dampfturbinen- und Propellerdrehzahl (Winkelgeschwindigkeiten ω_1 bzw. ω_2) beim Schiffsantrieb entworfen worden. Sie verkörpern die Idee, nicht die gesamte Sekundärleistung $M_2\,\omega_2$ der Zwischenverwandlung zu unterwerfen, sondern den Anteil $M_1\,\omega_2$ möglichst unmittelbar zu übertragen, nur den Unterschied energetisch umzuformen, und so die Verluste einer trivialen, sich auf die Gesamtleistung erstreckenden Doppelumformung beträchtlich einzuschränken.

[1]) Der Vortrag wird ausführlicher in der Zeitschrift für technische Physik erscheinen.

Als Lösung bot sich zunächst die Differentialwirkung zwischen einem primären Dynamorotor und einem »Stator«, der jedoch (im Entwurf) nicht stillstehend, sondern auf der gleichachsigen Sekundärwelle, also langsamrotierend angeordnet war. Das Primärmoment M_1 wurde dann unmittelbar übertragen (actio = reactio), und nur entsprechend dem Drehzahlunterschied (Slip!) entstand elektrische Energie, die einem gewöhnlichen Motor auf der Sekundärwelle zugeführt wurde und die Differenz der Momente lieferte.

Die Betrachtung des bedeutenden Größenunterschiedes zwischen einem Elektromotor und einem entsprechenden Schleuderrad führte zur hydrodynamischen Abbildung dieses Differentialgetriebes, d. h. Ersatz der Dynamorotoren usw. durch Turbinenräder. Die Verringerung der Verluste einer trivialen Aneinanderreihung von Turbopumpe und Turbine ($\eta = 0{,}82 \times 0{,}85 \sim 0{,}70$ entsprechend 30 vH Gesamtverlust) auf weniger als die Hälfte gelang auf Grund folgender Bemerkungen: Erstens mußte die schlimmste Verlustquelle aller Strömungen, die fast stets zur Wirbelablösung und Wirbelbildung führende »Umsetzung von Geschwindigkeit in Druck« nicht nur im »mittleren Faden«, sondern möglichst auch in jedem Einzelfaden vermieden und der kümmerliche Wirkungsgrad damaliger Schleuderpumpen (1903) durch Beseitigung des Diffusors und seiner Verzögerungsverluste umgangen[1]), die Reibung in allen übrigen Teilen durch Anstreben beschleunigter Relativströmung (gegenüber den jeweiligen Kanalwänden) den winzigen Verlustziffern schön gerundeter, polierter Ausflußdüsen (Grenzfall mit < 1 vH Energieverlust!) angenähert werden. Bemerkenswert ist, daß dieselben Ideen über »Umsetzung von Geschwindigkeit in Druck«, die hier in Maschinenentwürfen und bald auch in Metall verkörpert wurden, gleichzeitig (1904) und unabhängig von Prandtl in seiner Grenzschichttheorie als Differentialgleichung niedergelegt wurden. Diese Theorie ist mir aber erst 1911 bekannt geworden.

Zweitens mußte es gelingen, mechanische Energie nach dem Schema eines um einen Schenkel rotierenden Winkelrohres mit 1—3 vH Reibungsverlust in hydraulische Energie (Pressung + kinetische) zu verwandeln, also »Pumpen« mit 97—99 vH Nutzeffekt zu schaffen. Drittens mußten »Austrittsverluste« (durch ungenutzt abströmende kinetische Energie) und Verluste in Saugkrümmern, Spiralen und Rohren durch organischen Aufbau eines wirbelringartigen Kreislaufs aus lauter aktiven Turbinenrädern, ohne Rohre etc., ganz beseitigt werden.

So entstand 1903 ein neues Turbinengebilde, der »Transformator«[2]), dessen Haupttype einen Kreislauf aus Primärrad → erstem Sekundärrad → Leitrad → zweitem Sekundärrad → Primärrad umfaßt. Als schöner Erfolg der Theorie, wurden an der Stettiner Vulcanwerft ohne tastende Vorversuche der Reihe nach folgende Wirkungsgrade erzielt: 83 vH[3]) (100 PS-Versuchsmodell 1908); 86—88 vH (150 PS Bestellung 1910); 88 vH ($2 \times 10\,000$ PS 1912); 91,3 vH (Höchstwert bei $2 \times 20\,000$ PS für Kreuzer »Wiesbaden« mit polierten Kanälen 1915). Dankbar möchte ich dabei der Hilfe durch die zweidimensionalen Theorien von Prasil und (später) v. Mises, sowie meiner treuen Mitarbeiter Spannhake, Kucharski und Kluge gedenken. Die größten (überhaupt je gebauten) Einzelgetriebe waren die 1916 in Bau genommenen 12 Transformatoren von je 35 000 — 50 000 PS für 3 Schlachtkreuzer, die nach dem Versailler Frieden mit dem Schneidbrenner zerstört wurden. Seit 1908 ist auch eine Reihe anderer Typen entwickelt worden, insbesondere die am Schluß aufgeführte Transformator-Kupplung. Die Umsteuerfrage wurde durch besondere Rückwärtskreisläufe oder durch Benutzung von Sekundärrädern mit ungefähr radialen Schaufeln und verschiebbaren Leitapparaten gelöst.

2. Idealer Turbokompressor.[4]) Interessante Vorgänge stellen sich ein, wenn feine Luftblasen im Kreislauf eines »Transformators« mitgerissen und abwechselnd in Bereichen hohen und niederen Druckes isotherm komprimiert und expandiert werden. Bei einem hierauf beruhenden Turbokompressor wären mit genügend kleinen Relativgeschwindigkeiten viel höhere Wirkungsgrade isotherm erzielbar als in den heutigen

[1]) Vgl. die Patentschrift 221 422 des Verfassers vom Jahre 1905.

[2]) S Föttinger, Eine neue Lösung des Schiffsturbinenproblems, Jahrb. d. Schiffsbautechn. Ges. 1910, S. 170. Ders., Verhandlungen des Baltischen Ingenieurkongresses in Malmö 1914.

[3]) Mit rauhen Kanälen; das entspräche nach späterer Erfahrung 83 + 3,5 = 86,5 vH bei den seit 1914 verwendeten, durch Stahlkugeln polierten Kanälen.

[4]) Vgl. z. B. die Patentschrift 369 435 des Verfassers vom Jahre 1913. Aehnliche Kompressoren sind wiederholt »erfunden« worden, ohne die Notwendigkeit feinster Röhrenteilung zu erkennen.

Bauarten; ein Einzelrad von 1 m Dmr würde bei 3000 Uml./min und 80 vH Wasserfüllung rd. 100 at liefern.

Die Theorie zeigte zwei Schwierigkeiten: Die durch die hohen Druckgradienten $\partial p/\partial r$ bedingte Labilität des inneren Blasengewölbes (Achsenseite) und die Coriolis-Beschleunigung $2\,\omega\,w$ (ω Winkel —, w Relativgeschwindigkeit), welche die Blasenfläche schief oder gar parallel zur Rohrachse zu stellen strebt. Als Gegenmittel boten sich Verkleinerung von w und Unterteilung in feine Röhren.

Ein solcher Kompressor würde aus radialen Röhrenbündeln bestehen, in die innen Wasser- und Gaspfropfen eingesaugt werden, die am Umfang in einer Kammer durch ihre verschiedene Dichte getrennt werden. Das Wasser wird durch weite Laufradkanäle und einen festen Leitapparat im Kreislauf zurückgeführt. Die Möglichkeiten solcher Kompressoren und entsprechender Verbundschleuderpumpen (Förderung kleiner Wassermengen durch umlaufendes *Hg* auf höchste Drücke) oder Hydrokompressoren (Antrieb durch fallendes Wasser), sowie ihrer Umkehrungen (als Druckluftturbinen usw.) ermutigten[1]) zu dem Versuch, die Grenzen der Stabilität in physikalischen Modellen mit Spiegelbeobachtung festzustellen; das theoretisch befürchtete, periodische Zurückschlagen der Luft durch die ganzen Röhren infolge der Corioliskräfte trat aber deutlich schon bei so geringen Geschwindigkeiten ein, daß der stabile Bereich außerhalb der wirtschaftlichen Grenzen lag. Diese Idealmaschinen bilden sonach leider ein Gegenstück zu vielen, wegen zu teurer Apparatur unwirtschaftlichen, aber wissenschaftlich möglichen Verfahren der Chemie.

3. Hydrodynamische Wechselgetriebe zur automatischen Zugkraftsteigerung, als Gegenstück zum Gleichstrom-Serienmotor, waren eigentlich schon in den ersten Transformatoren verwirklicht[2]), wurden aber 1921 auf neuer Grundlage für Diesellokomotiven, Triebwagen, Walzwerke usw. entworfen. Sie liefern stark ansteigende Sekundärmomente (bei verminderter Sekundärdrehzahl auf Steigungen und beim Anfahren) aus Motoren gleichbleibenden Primärmoments (z. B. Verbrennungsmotoren) und bestehen aus einer primären Zentrifugalpumpe anormaler Bauart, welche mit einem sekundären Kolbenmotor, vorzugsweise einer Drehkolbenmaschine, zu einem Kreislauf verbunden ist[3]). Die Fördermenge Q ist daher der Sekundärdrehzahl (Geschwindigkeit V der Lokomotive) proportional.

Die Eigenart der Pumpe ist erstens die stark nach $Q = 0$ ansteigende »$Q\,H$-Charakteristik«, d. h. die Pumpe erzeugt vermöge besonderer Schaufelungen bei konstanter Drehzahl eine mit abnehmendem Q (d. h. abnehmender Sekundärdrehzahl) stark wachsende Förderhöhe H; zweitens das dabei stark sinkende Primärmoment. Bei konstanter Füllung, d. h. konstantem Drehmoment, der Antriebmaschine wird sich deren Drehzahl daher automatisch erhöhen, sobald der sekundäre Widerstand wächst, also V und Q sich vermindern. Das Sekundärmoment wächst dann automatisch sowohl gemäß der für primäre Normaldrehzahl giltigen Charakteristik, als proportional dem Quadrat des Primärtouren-Verhältnisses.

Ein nach diesem bisher unbeachteten Prinzip gebautes Wechselgetriebe gewährt in unendlich vielen, sich selbsttätig einstellenden Stufen bei nichtüberlastbaren Verbrennungsmaschinen, Elektromotoren usw. den Uebergang vom Motordrehmoment auf dessen drei- bis vierfachen Betrag. Bei Anwendung zweier, in Reihe oder parallel zu schaltender Pumpen erhöhen sich diese Werte beinahe auf das Doppelte. Die Wirkungsgrade weisen sehr flache Kuppen von 80—82 vH Höchstwert auf. Damit sind neue einfache Möglichkeiten stetiger dynamischer Zugkraftsteigerung gegeben, von größerer Wirtschaftlichkeit als durch elektrische Uebertragung.

4. Die Transformator- oder Asynchronkupplung löste 1910 zum erstenmal das dynamische Problem, Maschinen unbegrenzter Leistung und Drehzahl vollkommen stoß- und geräuschlos, beliebig langsam oder schnell, ein- und auszukuppeln, und ihre Leistung dynamisch, ohne Berührung fester Teile, mit beträchtlicher radialer und axialer und vollkommener tangentialer Nachgiebigkeit zu übertragen. Sie ist auch theoretisch bemerkenswert wegen ihres sehr hohen Wirkungsgrades, wegen der Abdämpfung starker Resonanzschwingungen und wegen der interessanten allgemein mechanischen und hydrodynamischen Untersuchungen, denen sie Ausgangspunkt und Inhalt gab.

---

[1]) Dank dem Entgegenkommen eines Geldgebers!

[2]) Vgl. die sehr stark nach $n_{II} = 0$ hin ansteigende Kurve der Sekundärmomente l. c., S. 184, Abbildung 23.

[3]) Vgl. die englische Patentschrift 184455 des Verfassers vom Jahre 1921/22.

Als einfachste Form des hydrodynamischen Transformators besteht sie aus je einem primären und sekundären, je ungefähr die Hälfte des Wirbelrings (s. o.) einnehmenden Turbinenrad. Durch Ein- bzw. Ausfüllen von Wasser oder Oel wird ein- bzw. ausgekuppelt.[1]) Das Fehlen aller festen Leitkanäle bringt zwei mechanische Besonderheiten. Erstens ist das Sekundärmoment bei jeder beliebigen Schauflung oder Füllung fast genau gleich dem Primärmoment. Zweitens kann der Wirkungsgrad bis auf verschwindende Reibungs- und Wirbelverluste von ~ 1 vH der Einheit genähert werden, indem gemäß Abschnitt **1**, 3 die Relativgeschwindigkeiten in beiden Laufrädern stark verkleinert, die Durchmesser entsprechend vergrößert werden. Die schnelle, verlustbringende Absolutbewegung in Leiträdern oder Diffusoren fehlt hier gänzlich, auch die Absolutreibung der Radwände gegenüber festen Gehäusen (sogen. Scheibenreibung).

Dementsprechend sind Wirkungsgrade von 97—99 vH, je nach Belastung, von Anfang an (1910) erreicht und seitdem von keiner anderen doppelten Energiewandlung (mechanisch → hydraulisch → mechanisch) übertroffen worden. Die Verluste äußern sich, wegen der Gleichheit der Momente, in einem prozentual gleichen Slip des Sekundärteils: Der Primärteil erzeugt ein hydrodynamisches »Drehfeld«; dieses überträgt wachsende Drehmomente auf den Sekundärrotor, sobald er gegenüber dem Synchronismus um wachsende Slipbeträge zurückbleibt, und demgemäß eine Ringströmung »induziert« wird. Bei Voreilung (z. B. Torsionsschwingungen) kehrt sich der Sinn der Ringströmung und Momente um. Daher besteht weitgehende Analogie zu den elektrodynamischen Asynchronmotoren, auch hinsichtlich der Dämpfungseigenschaften.

Sehr bemerkenswert ist, daß dieses einfachste Turbinengebilde — im Gegensatz zu den Uebersetzungs-Transformatoren — unseren gewöhnlichen zweidimensionalen Rechnungen inbezug auf Leistungsaufnahme anfänglich völlig trotzte. Auf Grund älterer eigener Beobachtungen an Ventilatoren stellte ich daher 1910 in Danzig Versuche mit rotierenden Schalen an, die durch Blechwände in Sektorzellen geteilt wurden[2]) und volle Aufklärung lieferten: Durch die ungewöhnliche Verkleinerung der Relativgeschwindigkeit wurden die bis dahin unbeachteten Verluste durch den »relativen Kanalwirbel« extrem groß, teilweise von zehnfacher Größenordnung der gewöhnlichen Turbulenzreibung. Die Berücksichtigung dieser Verluste ergab die richtige Form der Moment-Charakteristik. Mein Mitarbeiter W. Kucharski hat 1918 die weitgehenden Analogien der idealen Sektorströmung mit dem tordierten Sektorprisma usw. in einer wertvollen Studie theoretisch weiter verarbeitet[3]).

Seit der technischen Verwertung der Transformatorkupplung durch die Vulcan-Werke, Hamburg (ab 1923) sind, dank den Bemühungen von Dr. G. Bauer, eine Reihe großer Schiffsanlagen (u. a. drei zu je 4200 PS) damit erfolgreich ausgerüstet worden. 601

Rückschluß auf die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse.

Von **H. POLLACZEK-GEIRINGER** in Berlin.

Im Folgenden soll eine sehr einfache Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet und ihre Bedeutung im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung dargestellt werden. Um das letztere zu erreichen, muß man etwas weiter ausholen und den Problemkreis, dem die Fragestellung entstammt, kurz entwickeln, umsomehr als in manchen einschlägigen Darstellungen die hier auftretenden Probleme garnicht oder unvollkommen unterschieden werden.

1. Die Formeln von Bernoulli, Poisson und Bayes.[4]) Im Mittelpunkt der theoretischen Wahrscheinlichkeitsrechnung stehen zwei Fragestellungen, die man als die Bernoullische und Bayessche zu bezeichnen pflegt. Sie stehen einander im Wesent-

[1]) Vgl. die Patentschriften 238804 und 244279 des Verfassers vom Jahre 1905 bzw. 1908 und 1910.

[2]) Der zu Vorlesungszwecken dienende Originalapparat *m.* früheren Danziger Instituts wurde im Vortrage vorgezeigt.

[3]) Kucharski, Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. Oldenbourg 1918.

[4]) Die Bezeichnung und Gruppierung der Theoreme in diesem referierenden Abschnitt folgt im Wesentlichen der Darstellung von v. Mises »Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung«. Math. Zeitschr. Bd. 4 (1919), S. 1 bis 97.

lichen dual gegenüber, wenn auch diese Dualität sich nicht in allen Einzelheiten verfolgen läßt. Wir wollen beide Problemstellungen im »Urnenschema« formulieren.

1. Bernoullis Problem: In einer Urne liegen schwarze und weiße Kugeln in irgend einem Mischungsverhältnis. Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße zu ziehen, sei gleich q, die, eine schwarze zu ziehen, gleich p. Es sollen n Züge gemacht werden; nach jedem Zug wird die gezogene Kugel wieder zurückgelegt und auch sonst wird angenommen, daß alle Umstände soweit ungeändert bleiben, daß für jeden neuen Zug wieder die Wahrscheinlichkeiten q, p für das Ziehen einer weißen, bzw. einer schwarzen Kugel bestehen. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(x)$ dafür, in n Zügen gerade x weiße und $(n-x)$ schwarze Kugeln zu erhalten. Das ist die Fragestellung von Bernoulli. Die Antwort wird bekanntlich durch eine sehr einfache Formel gegeben, die wegen ihres Zusammenhanges mit der Newtonschen Binominalformel auch als Newtonsche Formel bezeichnet wird. Sie lautet:

$$\mathfrak{w}_n(x) = \binom{n}{x} q^x p^{n-x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$\mathfrak{w}_n(x)$ ist eine sogenannte »arithmetische« Wahrscheinlichkeit, d. h. sie ist nur definiert für alle ganzzahligen Werte von x zwischen 0 und n. (Für $x<0$ und $x>n$ ist $\mathfrak{w}_n(x)=0$ anzunehmen.) Die Formel (1) stellt die exakte Lösung des Bernoullischen Problems dar für ganz beliebige n, p, q, x. Der »Mittelwert« b_n der Bernoullischen Verteilung (1) besitzt den Wert nq, die »Streuung« s_n^2 die Größe npq.

Aber für große n läßt sich die Newtonsche Formel schwer auswerten, da sie die Berechnung der Fakultäten von n, $n-x$ und x erfordert. Auch bietet sie keine genügende Uebersicht über den Verlauf der $\mathfrak{w}_n$-Werte. Laplace hat die Lösung des Bernoullischen Problems auf eine bedeutend handlichere Form gebracht, indem er einen Grenzübergang für unendliche n durchführte. Die Wahrscheinlichkeiten p und q behalten dabei einen festen endlichen Wert; daraus folgt, daß sowohl der Mittelwert $b_n = nq$ wie auch die Streuung $s_n^2 = npq$ mit n gleichfalls ins Unendliche wachsen. Führt man eine Koordinatentransformation durch, die den Koordinatenanfangspunkt nach $x = b_n$ verlegt und die Abszissen im Verhältnis $1:\sqrt{n}$ zusammendrängt, d. h. führt man

$$\frac{x-b_n}{\sqrt{2npq}} = u, \qquad \text{wobei} \qquad x = b_n + u\sqrt{2npq} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

als neue Veränderliche ein, so ergibt sich in dieser neuen Veränderlichen im limes für $\mathfrak{w}_n(x)$ die charakteristische Gestalt der Gaußschen Kurve, d. h. es gilt die Laplacesche Formel:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2npq}\, \mathfrak{w}_n(b_n + u\sqrt{2npq}) = e^{-u^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

oder als Näherungsformel für große n geschrieben:

$$\mathfrak{w}_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2npq}} \cdot e^{-\frac{(x-b_n)^2}{2npq}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1'').$$

Einen wesentlich anderen Grenzübergang hat Poisson durchgeführt. Auch er geht von (1) aus und geht mit n gegen unendlich, läßt aber gleichzeitig q unbegrenzt abnehmen, in der Weise, daß der Mittelwert $b_n = nq$ einem festen Wert a zustrebt. Damit Gleichung (1') gilt, muß nicht nur n sehr groß werden, sondern auch $h = \frac{1}{\sqrt{2npq}}$ sehr klein sein, was auch stets der Fall ist, wenn n bei endlichem q unbegrenzt wächst. Ist aber die Wahrscheinlichkeit q sehr klein, oder das Ereignis, um dessen Eintritt es sich handelt, ein sehr seltenes, so kann es geschehen, daß auch bei sehr großem n das h keineswegs klein wird. Da p bei sehr kleinem q nahe an 1 liegt, so hat man in diesem Fall:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2npq}} \sim \frac{1}{\sqrt{2nq}} = \frac{1}{\sqrt{2b_n}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Ist dann q so klein, daß nq keine sehr große Zahl, sondern von der Größenordnung 1 ist, so würde die Anwendung der Laplaceschen Formel (1') eine sehr große Abweichung gegenüber der richtigen durch die Newtonsche Formel gegebene Wahrscheinlichkeit ergeben. Dieser Ueberlegung folgend, hat Poisson neben dem Laplaceschen Grenzübergang (1') den anderen ins Auge gefaßt, daß q mit wachsendem n wie $1/n$ klein wird, d. h. nq festgehalten wird. Unter dieser Annahme bleiben sowohl der Mittelwert $a = nq$ als auch die Streuung $s^2 = npq$ bei unbegrenzt wachsendem n endlich, so daß

eine Koordinatentransformation wie (α) die dazu dient, in der neuen Variabeln endlichen Mittelwert und endliche Streuung zu erzielen, hier unnötig ist. Dieser Grenzübergang ist viel einfacher als der Laplacesche und führt zu der Formel:

$$\mathfrak{w}_n(x) \sim \frac{a^x}{x!} e^{-a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}).$$

Man bezeichnet (I), da für sie die Kleinheit von q charakteristisch ist, als Formel für die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse oder auch nach L. v. Bortkiewitsch[1]) als »Gesetz der kleinen Zahlen«.

Der Formel (1) und den an sie angeschlossenen Grenzwertformeln (1′) und (1″) des Bernoullischen Gedankenkreises kann man analoge Ueberlegungen hinsichtlich der zweiten großen Problemgruppe, der Bayesschen gegenüberstellen. Wir wollen auch das Bayessche Problem im »Urnenschema« erklären. Eine Reihe von Urnen enthalte schwarze und weiße Kugeln in verschiedenen Mischungsverhältnissen. In n Zügen, (vor denen stets die früher gezogene Kugel zurückgelegt wird) aus einer Urne sei n_1-mal »weiß« gezogen worden. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(x)$ dafür, daß in der Urne, aus der die n Ziehungen erfolgt sind, die Wahrscheinlichkeit eines weißen Zuges gerade x ist, oder, wie wir auch sagen wollen, das Mischungsverhältnis x herrscht. Man nennt $\mathfrak{w}_n(x)$ auch die Wahrscheinlichkeit des Rückschlusses auf das Mischungsverhältnis x; von einem anderen Gesichtspunkt aus bezeichnet man sie als Wahrscheinlichkeit »a posteriori« zum Unterschied von der Wahrscheinlichkeit »a priori« $\mathfrak{v}(x)$; dieses $\mathfrak{v}(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man beim Ziehen unter allen möglichen Urnen, die man sich unterscheidbar vorzustellen hat, gerade eine trifft, in der das Mischungsverhältnis x herrscht. Man wird oft $\mathfrak{v}$ als konstant annehmen, d. h. es als gleich wahrscheinlich hinstellen, beim Ziehen eine beliebige der Urnen zu ergreifen. Jedenfalls aber muß $\mathfrak{v}$ gegeben sein. Die Lösung wird geleistet durch die Bayessche Formel:

$$\mathfrak{w}_n(x) = C_n\, \mathfrak{v}(x)\, x^{n_1} (1-x)^{n-n_1}; \qquad \frac{1}{C_n} = \sum_x \mathfrak{v}(x)\, x^{n_1} (1-x)^{n-n_1} \quad . \quad (2\,\mathrm{a}).$$

Ist die a priori-Verteilung nicht durch Einzelwahrscheinlichkeiten gegeben, sondern durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $v(x)$, so ist auch das Resultat eine geometrische Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ und an Stelle der Summe tritt bei der Bestimmung der Konstanten ein Integral:

$$w_n(x) = C_n\, v(x)\, x^{n_1} (1-x)^{n-n_1}, \qquad \frac{1}{C_n} = \int_0^1 v(x)\, x^{n_1} (1-x)^{n-n_1}\, dx \quad . \quad (2).$$

Ist die a priori-Wahrscheinlichkeit konstant, so fällt sie in (2) und (2 a) fort, da sie sich im Zähler und Nenner weghebt.

Die in (2) und (2 a) auftretende Funktion von x, mit der wir uns etwas genauer beschäftigen müssen, hat bei $x=0$ und $x=1$ eine Nullstelle von der Ordnung n_1 bzw. $(n-n_1)$. Im Innern dieses Intervalls besitzt sie ein Maximum, für dessen Lage folgendes gilt: Sind für x alle Werte zwischen 0 und 1 a priori gleich wahrscheinlich, so liegt die größte Wahrscheinlichkeitsdichte a posteriori an der Stelle $n_1 : n$. Sind nur einzelne diskrete x-Werte a priori möglich und diese alle gleich wahrscheinlich, so ist a posteriori der wahrscheinlichste Wert von x einer der beiden Werte, die der Zahl $n_1 : n$ am nächsten liegen. Wir werden hier vor allem mit dem kontinuierlichen Problem (2) zu tun haben.

Die Verwendung der Bayesschen Formel (2) bei großem n führt ebenso zu Schwierigkeiten wie die von (1). Laplace hat daher auch diese Formel (allerdings nur unter der Annahme $v = \text{konst.}$) einer ähnlichen Untersuchung unterworfen wie die Newtonsche. Seiner Annahme gemäß soll bei Uebergang zu unendlichem n auch n_1 unbegrenzt wachsen, in der Weise, daß das Verhältnis $n_1 : n = \alpha$ konstant bleibt. Hier bleibt, anders als beim Bernoullischen Problem, der Mittelwert a bei unbegrenzt wachsendem n stets endlich, die Streuung s_n^2 wird wie $1/n$ klein. Man führt

$$u = (x-\alpha)\sqrt{\frac{n}{2\,\alpha\,(1-\alpha)}}, \qquad \text{wobei} \qquad x = \alpha + u\sqrt{\frac{2\,\alpha\,(1-\alpha)}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

---

[1]) Vergl. L. v. Bortkiewitsch, »Das Gesetz der kleinen Zahlen«. Leipzig, B. G. Teubner, 1898. Dort wird die bis dahin in ihrer Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik nicht entsprechend gewürdigte Formel (I) an vielen statistischen Beispielen erläutert und es werden auch Tafeln für die Poissonsche Funktion gegeben.

als neue Veränderliche ein, dehnt also die Abszissen im Maßstab $\sqrt{n}:1$, um in u endliche Streuung zu erzielen. Es ergibt sich die zu (1′) analoge Laplace-Bayessche Formel:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2\,\alpha(1-\alpha)}{n\,\pi}}\cdot w_n\left(\alpha + u\sqrt{\frac{2\,\alpha(1-\alpha)}{n}}\right) = e^{-u^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

bzw.

$$w_n(x) \sim \sqrt{\frac{n}{2\,\alpha(1-\alpha)\,\pi}}\; e^{-\frac{n(x-\alpha)^2}{2\alpha(1-\alpha)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2'').$$

Die Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ eines Rückschlusses folgt also bei genügend großem n ebenfalls einem Gaußschen Gesetz. Wie v. Mises gezeigt hat[1]), gilt (2′) [und somit auch (2″)] auch bei beliebiger, nicht konstanter a priori-Wahrscheinlichkeit, wenn nur $v(x)$ als beschränkte, an der Stelle $x=\alpha$ stetige und nicht verschwindende Funktion vorausgesetzt wird. Es wird dann $\lim_{n\to\infty} w_n(x)$, wie (2′) zeigt, gänzlich unabhängig von der a priori-Wahrscheinlichkeit $v(x)$. Formel (2′) hat, anders als (1′), nur mehr für geometrische Wahrscheinlichkeiten einen Sinn (weil ihre Ableitung unter Voraussetzung eines kontinuierlichen $v(x)$ durchgeführt wird), d. h. links in (2′) steht stets eine Wahrscheinlichkeitsdichte — nicht wie in (1′) eine Einzelwahrscheinlichkeit. Man erhält daher bei Berechnung eines $w_n(x)$ für gegebene x-Werte Zahlen, die auch größer als 1 sein können.

2. Wahrscheinlichkeit des Rückschlusses bei festem n_1. Nach dem Bisherigen ist es naheliegend, den Formeln (2) und (2′) nun eine zu (1) analoge Formel (II) zur Seite zu stellen, die einen Rückschluß im Falle seltener Ereignisse gestattet. Nehmen wir an, n wachse wieder unbegrenzt, aber n_1 bleibe dabei endlich, was dem Fall entspricht, daß bei sehr häufiger n maliger Wiederholung einer Alternative ein bestimmtes Ereignis, etwa das Ziehen einer weißen Kugel, doch nur einige Male eintritt, während die Anzahl $n-n_1$ des Ziehens der schwarzen Kugel in der Größenordnung von n selbst liegt; $\frac{n_1}{n}=\alpha$ strebt also gegen Null. Wir gehen aus von der Formel (2) für geometrische Wahrscheinlichkeiten:

$$w_n(x) = C_n\, v(x)\, x^{n_1}(1-x)^{n-n_1} = C_n\, v(x)\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n_1}(1-x)^n \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Während bei Ableitung der Laplaceschen Formel das Intervall (0,1) nach Verlegung der Anfangspunkte in den Punkt α noch proportional $\sqrt{n}$ gedehnt wurde, so daß sich in (2′) die Glockenkurve e^{-u^2} für die Variable $u=(x-\alpha)\sqrt{\frac{n}{2\,\alpha(1-\alpha)}}$ ergab, müssen wir hier das Intervall proportional n dehnen, ohne aber eine Verlegung des Koordinaten-Anfangspunktes vorzunehmen. Es geht nämlich in unserem Fall $\alpha=\frac{n_1}{n}$, was bei großem n im wesentlichen dem Mittelwert entspricht, mit wachsendem n gegen Null, $\frac{\alpha(1-\alpha)}{n}=\frac{n_1(1-\alpha)}{n^2}$ aber wird mit wachsendem n, da $1-\alpha$ gegen 1 geht und n_1 endlich bleibt, wie $1/n^2$ klein, nicht wie früher beim Laplaceschen Grenzübergang wie $1/n$; um also wieder in der neuen Variabeln endliche Streuung zu erzielen, führen wir

$$u = n\,x, \quad \text{wobei} \quad x=\frac{u}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathbf{a})$$

als neue Variable ein. Dann wird:

$$w_n\left(\frac{u}{n}\right) = C_n\, v\left(\frac{u}{n}\right)\left(\frac{u}{n}\right)^{n_1}\left(\frac{n}{n-u}\right)^{n_1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n = C_n'\, v\left(\frac{u}{n}\right) u^{n_1}\left(\frac{n}{n-u}\right)^{n_1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \quad (\mathrm{b}).$$

Läßt man jetzt n unbegrenzt wachsen, während $|u|<U_0$ bleibt, wobei U_0 eine beliebig große aber feste Zahl bezeichnet, so geht, weil n_1 endlich ist, die rechte Seite gegen

$$C_n'\, v(o)\, u^{n_1}\cdot 1\cdot e^{-u} = C_n''\, u^{n_1}\cdot e^{-u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{c}).$$

Wie man sieht, ergibt sich auch hier im limes die Unabhängigkeit von der a priori-Wahrscheinlichkeit $v(x)$. Die Konstante C_n'' bestimmen wir aus der Bedingung, daß für alle n

$$\int_0^1 w_n(x)\,dx = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{d}).$$

---

[1]) v. Mises, l. c. 1) S. 84

Setzen wir hier für $w_n(x)$ den Ausdruck (c) ein, so entsteht

$$1 = C_n'' \int_0^1 u^{n_1} e^{-u}\, dx = C_n'' \int_0^\infty \frac{1}{n} u^{n_1} e^{-u}\, du = \frac{n_1!}{n} C_n'', \quad C_n'' = \frac{n}{n_1!} \quad . \quad . \quad (e).$$

Das Verfahren, nach dem hier die Konstante berechnet wurde, ist nicht korrekt, da der limes-Ausdruck (c) nur für jeden endlichen Bereich $|u| < U_0$ abgeleitet war, dann aber bei der Integration in (e) auf das unendliche Intervall angewandt wurde. Man muß, um (e) korrekt zu begründen, (ähnlich wie das bei Ableitung von (2') notwendig ist) zeigen, daß sich immer ein so schmaler Bereich $(0, x_0)$ abgrenzen läßt, daß bei Annahme des C_n''-Wertes aus (e) das über diesen Bereich erstreckte Integral von w_n sich bei wachsendem n beliebig wenig von 1 unterscheidet, und daß andererseits das Integral von x_1 bis 1 für jedes feste $x_1 > 0$ bei wachsendem n beliebig klein wird. Um dies einzusehen, gehen wir auf die exakte Gl. (b) zurück. Das dort auftretende Glied $\left(\frac{n}{n-u}\right)^{n_1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n_1}$ kommt für hinlänglich kleines $|x| < x_0$ beliebig nahe an 1, liegt also etwa bei beliebig vorgegebenem positivem η zwischen 1 und $1+\eta$. Wir integrieren dann (b) von 0 bis x_0, nachdem wir vorher mit dem aus (e) folgenden Wert von $C_n' = \frac{C_n''}{v(0)}$ multipliziert haben. Das gibt nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung, wenn $\bar{v}$ einen Mittelwert von $v(x)$ im Intervall $(0, x_0)$ und J das Integral $J = \int_0^{x_0} \frac{n}{n_1!} u^{n_1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \frac{1}{n}\, du$ bezeichnet:

$$\frac{\bar{v}}{v(0)} \cdot J \cdot \leqq \int_0^{x_0} w_n(x)\, dx \leqq \frac{\bar{v}}{v(0)} (1+\eta) J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f).$$

Die Faktoren vor dem Integral in den Außengliedern dieser Ungleichung können durch Wahl eines hinreichend kleinen x_0 beliebig nahe an 1 gebracht werden, da voraussetzungsgemäß v an der Stelle $x = 0$ stetig ist und nicht verschwindet. Für das Integral J erkennt man aber dasselbe durch n-malige partielle Integration; denn es ist

$$n_1!\, J = \int_0^{u_0} u^{n_1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = - \left| \begin{array}{l} - u^{n_1} \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n+1} \\ - n_1 u^{n_1 - 1} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n+2} - \ldots \\ - n_1! \frac{n^{n_1+1}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+n_1+1)} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n+n_1+1} \end{array} \right|_0^{u_0} . \quad (g).$$

Alle Glieder mit Ausnahme des letzten enthalten sowohl den Faktor u und verschwinden daher an der unteren Grenze, wie auch den Faktor $(1 - u/n)^n$. Dieser wird an der oberen Grenze für $u = u_0$ beliebig klein, wenn man (nach Wahl von x_0) n so stark wachsen läßt, daß

$$\left(1 - \frac{u_0}{n}\right)^n \to e^{-u_0} = e^{-n x_0}$$

hinreichend klein ist. Ebenso verschwindet für unbeschränkt wachsendes n das letzte Glied an der oberen Grenze, und an der unteren Grenze ergibt es, da n_1 endlich ist, gerade $n_1!$

Daß schließlich $\int_{x_1}^1 w_n\, d\, x$ bei Annahme von $C_n' = n : [n_1!\, v(0)]$ mit wachsendem n für jedes $x_1 > 0$ beliebig klein wird, obgleich C_n' proportional n wächst, folgt auch aus der in (g) durchgeführten partiellen Integration. Bezeichnen wir mit J_1 das Integral:

$$J_1 = \int_{x_1}^1 \frac{n}{n_1!} u^{n_1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n - n_1} \frac{1}{n}\, d\, u$$

so gilt:

$$\int_{x_1}^{1} w_n(x)\,dx \leq \frac{v_{\max}}{v(0)} J_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(h)}.$$

Integriert man J_1 ebenso wie früher J partiell, so tritt in allen Summanden $u \cdot \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-n_1+1}$ als Faktor auf. Wegen $u = n\,x$ sind jetzt alle Summanden an der obern Grenze 1 gleich Null, an der untern Grenze verschwinden sie bei beliebig kleinem aber festem x_1 mit e^{-nx_1}, so daß in der Tat $\lim_{n\to\infty} J_1 = 0$.

Fassen wir nunmehr (c) und (e) zusammen, so erhalten wir als Schlußergebnis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} w_n\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u^{n_1} e^{-u}}{n_1!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2''')$$

oder als Näherungsformel für große n:

$$w_n(x) \sim \frac{n}{n_1!} (n\,x)^{n_1} e^{-nx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}.$$

Wir sprechen das Resultat in einem Satze aus, in dem wir für die Variable $n\,x = u$ den üblichen Ausdruck »Erwartungswert« verwenden: Ist bei sehr großer Wiederholungszahl n einer Alternative der Eintritt des Ereignisses in nur n_1 Fällen beobachtet worden, so ist die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, daß der Erwartungswert des Ereignisses bei u liegt, annähernd gleich $\frac{n}{n_1!} u^{n_1} e^{-u}$, wofern $n_1 : n$ eine kleine Zahl ist, gleichgültig welches die *a priori*-Wahrscheinlichkeit für n ist. Man erkennt die formale Aehnlichkeit von (II) und (I) ebenso wie ja auch (2′) und (1′) eine solche aufweisen. Doch ist wohl zu beachten, daß (2‴) eine Wahrscheinlichkeitsdichte liefert, die eine Funktion der stetigen Variablen x ist, während die Formel (1″) nur für ganzzahlige x gilt.

Bei der Ableitung der Laplaceschen Formel (2′) wird von der Endlichkeit von $a = \frac{n_1}{n}$ ausdrücklich Gebrauch gemacht, indem $\frac{1}{n\,a} \to 0$ bei wachsendem n, mehrfach verwendet wird, so daß man also bei Anwendung von (2′) bzw. (2″) im Falle eines im Vergleiche zu n kleinen n_1 recht schlechte Näherungen erwarten muß.

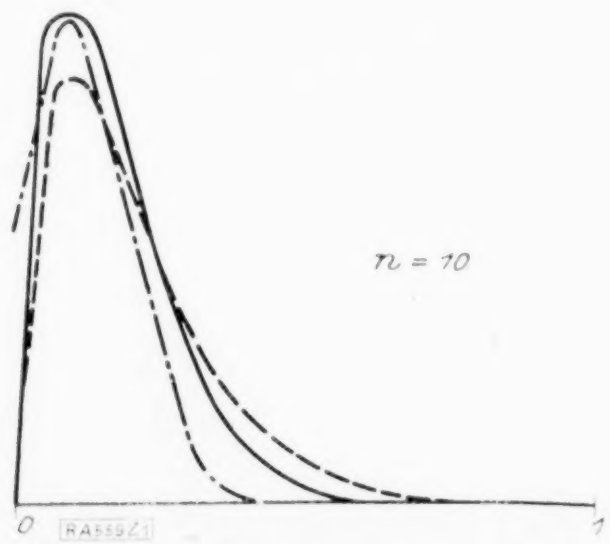


Abb. 1 a. Ordinateneinheit gleich 1 cm.

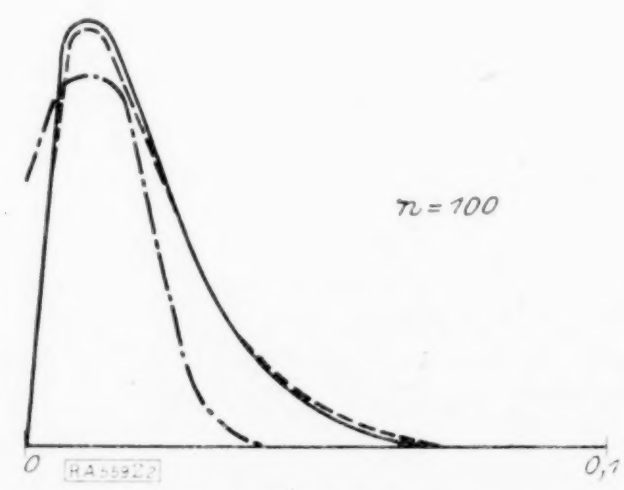


Abb. 1 b. Ordinateneinheit gleich 1 mm.

3. Anwendungen und Zusätze. Abb. 1 zeigt in a) und b) nebeneinander für $n = 10$, $n_1 = 1$ und für $n = 100$, $n_1 = 1$ je drei Kurven, nämlich die exakte nach (2) (mit $v = \text{konst}$) gerechnete Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(x)$ (ausgezogen) die nach (2″) gerechnete (strichpunktiert) und die nach (2‴) gerechnete (gestrichelt). Der Maßstab ist für die Abszissen in b) zehnmal größer, für die Ordinaten zehnmal kleiner als in a), so daß die Abb. a) und b) in ungefähr gleicher Größe erscheinen. Während bei $n = 10$ die Uebereinstimmung von (2) und (II), wie zu erwarten, noch keine sehr gute ist, ist schon bei $n = 100$, die exakte Kurve von der Näherungskurve wenig zu unterscheiden. Die Näherungskurve verläuft vor dem bei $x = \frac{1}{100}$, $u = 1$ erreichten Maximum an ein wenig

unterhalb der exakten, und hält sich auch nach Passierung des Maximums zu nächst noch unterhalb dieser. Fast genau bei $u = 3$ kreuzen sich die beiden Kurven und die Näherungskurve verläuft von da an etwas oberhalb der exakten. Die Laplacesche Kurve zeigt einen von der exakten recht verschiedenen Verlauf.

Mittelwert a und Streuung s^2 der durch $(2''')$ bzw. (II) gegebenen Verteilung lassen sich leicht bestimmen. Es ist

$$a = \int_0^1 x\, w_n(x)\, dx = \frac{n}{n_1!} \int_0^1 u^{n_1} e^{-u} \cdot \frac{u}{n}\, dx = \frac{1}{n\, n_1!} \int_0^\infty u^{n_1+1} e^{-u}\, du = \frac{n_1+1}{n}$$

und

$$s^2 = \int_0^1 w_n(x)\,(x-a)^2\, dx = \int_0^1 w_n(x)\, x^2\, dx - a^2 = \frac{(n_1+1)(n_1+2)}{n^2} - \frac{(n_1+1)^2}{n^2} = \frac{n_1+1}{n^2}.$$

Man sieht, daß der Mittelwert hier mit der Stelle des Maximums die bei $n_1 = u$ liegt, nicht genau zusammenfällt, sondern bei $u = n_1 + 1$ liegt. Das ist ein Unterschied nicht nur gegenüber der Gaußschen Verteilung sondern auch gegenüber der durch (I) gegebenen Poissonschen Verteilung. Man kann leicht ausrechnen, daß bei diesen Verteilungen Mittelwert und Streuung genau den Wert a besitzen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der gesuchte Erwartungswert höchstens den Wert u besitzt, ist gegeben durch das Integral

$$J(n_1, u) = \frac{1}{n_1!} \int_0^u u^{n_1} e^{-u}\, du \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Die »Summenfunktion« $J(n_1, u)$ wächst natürlich monoton vom Werte 0 bis zum Wert 1. Sie spielt für das hier behandelte Problem dieselbe Rolle, wie die Gaußsche Summenfunktion $\frac{1}{2}[\Phi(u) + 1]$ für das durch den Grenzübergang $(2')$ entstehende symmetrische Problem. Für ganzzahlige n_1 läßt sich das Integral (1) in geschlossener Form auswerten. Man erhält für $n_1 = 2, 3, 4, 5, \ldots$

$$J(2, u) = -\left[\frac{e^{-u}}{2}(u^2 + 2u + 2)\right]_0^u = 1 - \left(\frac{u^2}{2} + u + 1\right) e^{-u}$$

$$J(3, u) = 1 - \left(\frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} + u + 1\right) e^{-u}$$

$$J(4, u) = 1 - \left(\frac{u^4}{24} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} + u + 1\right) e^{-u}$$

$$J(5, u) = 1 - \left(\frac{u^5}{120} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} + u + 1\right) e^{-u}$$

. . . . . .

Rechnen wie etwa für $n_1 = 3$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Erwartungswert des Ereignisses sich vom wahrscheinlichsten Wert, der bei $u = 3$ liegt um höchstens ± 1 unterscheidet, so erhalten wir:

$$W(2, 4) = -\left[e^{-u}\left(\frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} + u + 1\right)\right]_2^4 = \frac{19}{3\,e^2} - \frac{71}{3\,e^4} = 0{,}424.$$

Für $W(3, 5)$, das ist für die um ± 1 vom Mittelwert $u = 4$ entfernten Grenzen, ergibt sich in gleicher Weise

$$W(3, 5) = 0{,}382.$$

Man kann nun weiter nach den »wahrscheinlichen Grenzen« fragen. Darunter versteht man bekanntlich bei einer Gaußschen Verteilung zwei symmetrisch zum Mittelwert a gelegene Zahlen $a + x_0, a - x_0$, für die $W(a - x_0, a + x_0) = 0{,}5$ ist; es ist dann ebenso wahrscheinlich, daß die fragliche Variable x innerhalb der »wahrscheinlichen Grenzen« liegt, wie daß sie außerhalb derselben liegt. In unserm Fall ist die Verteilung nicht symmetrisch und überdies fällt der wahrscheinliche Wert mit dem Mittelwert nicht zusammen. Es bleibt daher zunächst unbestimmt, was man unter den »wahrscheinlichen Grenzen« verstehen soll. Wir können etwa zwei Zahlen ξ und η bestimmen, so

daß $W(n_1 - \xi, n_1) = W(n_1, n_1 + \eta) = 0{,}25$, wobei also $W n(n_1 - \xi, n_1 + \eta) = 0{,}5$ ist. Dies führt auf die zwei transzendenten Gleichungen für u:

$$J(n_1, u) - J(n_1, n_1) = \pm 0{,}25.$$

In dem hier betrachteten Spezialfall $n_1 = 3$ lautet die erste Gleichung:

$$e^{-u}\left(\frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} + u + 1\right) = 0{,}25 + \frac{13}{e^3} = \alpha$$

und daraus wird nach einfacher Umformung:

$$\frac{1}{\log e} \log\left(\frac{u^3 + 3u^2 + 6u + 6}{6u}\right) = u.$$

In dieser Form kann man die Gleichung durch Iteration beliebig genau lösen; rechnet man nur eine Dezimale, so kommt $u = 1{,}8$. Die zweite transzendente Gleichung lautet:

$$e^{-u}\left(\frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{2} + u + 1\right) = \frac{13}{e^3} - 0{,}25 = \beta$$

und ergibt als Lösung $u = 4{,}2$. Man kann also das Intervall $(1{,}8;\ 4{,}2)$ als das Intervall der wahrscheinlichen Grenzen ansehen. Bei genauerer Berechnung zeigt sich natürlich, daß die wahrscheinlichen Grenzen nicht symmetrisch zum wahrscheinlichsten Wert liegen. Bei zwei Dezimalen kommt: $(1{,}76;\ 4{,}19)$.

Für das in (1) auftretende Integral sind von K. Pearson Tafeln herausgegeben worden[1]). Während das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} x^p \, dx = p! = \Gamma(p+1)$$

die gewöhnliche Γ-Funktion darstellt, wird

$$\int_0^x e^{-x} x^p \, dx = \Gamma_x(p+1)$$

als »unvollständige Γ-Funktion« bezeichnet. Das von uns oben benutzte Integral $J(n_1, u)$ drückt sich durch Γ_x so aus:

$$J(x, p) = \frac{\Gamma_x(p+1)}{\Gamma(p+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Die Pearsonschen Tafeln geben $J(x, p)$ mit p und $\xi = \frac{x}{\sqrt{p+1}}$ als Tafelvariabeln, und zwar für $0 \leq p \leq 50$, $0 \leq \xi \leq 17$.

Entnehmen wir etwa die oben direkt errechneten Werte von $W_n(2{,}4)$ der Tafel, so finden wir (S. 13)

$$W_n(2{,}4) = 0{,}5665299 - 0{,}1428765 = 0{,}423653$$

und

$$W_n(3{,}5) = 0{,}7349741 - 0{,}3527682 = 0{,}382205.$$

Man wird die Tafeln vor allem benutzen, wenn $p = n_1$ eine gebrochene oder eine nicht sehr kleine ganze Zahl ist und nur Reihenentwicklungen oder numerische Quadraturmethoden zum Ziele führen. Betrachten wir folgendes Beispiel: Eine Statistik der Kinderselbstmorde in Preußen aus den Jahren 1869—1893, also über einen Zeitraum von 25 Jahren erstreckt, hat in dieser Zeit 49 Selbstmorde von Knaben, 11 von Mädchen unter 10 Jahren ergeben[2]). Man kann nach der Wahrscheinlichkeit dafür fragen, daß der Ewartungswert der in 25 Jahren verübten Knabenselbstmorde zwischen 48 und 50 liegt. Es ergibt sich, wenn man bei $p = 49$, $\xi_1 = \frac{48}{\sqrt{50}}$, $\xi_2 = \frac{50}{\sqrt{50}}$ in den Pearsonschen Tafeln (S. 114) nachschlägt

$$W(48{,}50) \sim 0{,}12.$$

Es besteht also eine Wahrscheinlichkeit von 12 vH für diese Annahme. Für die Annahme einer zwischen 10 und 12 liegenden Erwartungszahl der Mädchenselbstmorde ergibt sich in gleicher Weise $W(10,\ 12) \sim 0{,}24$.

Die von uns abgeleitete Formel (II) läßt, ähnlich wie die Laplacesche (2'), eine unmittelbare Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall zu. Eine solche ist beim Bayesschen Problem gewissermaßen noch wichtiger als beim Bernoullischen,

[1]) K. Pearson. Tables of the incomplete Γ-function. London 1922.
[2]) Vgl. v. Bortkiewitsch l. c. S. 18.

da das Analogon des Problems, das das allgemeine eindimensionale Bernoullische bildet, schon ein mehrdimensionales Bayessches Problem ist: Die Urne, aus der n-mal gezogen wird, enthalte nicht nur schwarze und weiße Kugeln, bzw. mit Null und Eins bezeichnete Lose, sondern 1, 2, ... $\varkappa$-wertige Lose oder Kugeln in den Mischungsverhältnissen $x_1, x_2, \ldots x_\varkappa$, so daß also die Wahrscheinlichkeit dafür, ein mit »eins« bzw. »zwei« ... »$\varkappa$« bezeichnetes Los zu ziehen, x_1 bzw. $x_2, \ldots x_\varkappa$ ist. Tatsächlich seien in n Zügen $n_1 = n\,a_1$, $n_2 = n\,a_2, \ldots n_\varkappa = n\,a_\varkappa$ mit $1, 2, \ldots \varkappa$ bezeichnete Kugeln gezogen worden, so daß

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_\varkappa = 1; \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_\varkappa = n.$$

Bezeichnen $v_1(x_1), v_2(x_2) \ldots v_{\varkappa-1}(x_{\varkappa-1})$ die »a priori«-Wahrscheinlichkeiten der einzelnen x-Werte, so ist die Wahrscheinlichkeit »a posteriori« $w_n(x_1, x_2, \ldots x_{\varkappa-1})$ dafür, daß unter Annahme der durch $n_1, n_2, \ldots n_\varkappa$ bestimmten Ziehungsresultate die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Losarten bei $x_1, x_2, \ldots x_\varkappa$ liegen, durch die Formel gegeben:

$$w_n(x_1, x_2, \ldots x_{\varkappa-1}) = C_n\, v_1(x_1)\, v_2(x_2) \ldots v_{\varkappa-1}(x_{\varkappa-1})\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{\varkappa-1})^{n_\varkappa} \quad (3),$$

wobei C_n durch ein $(\varkappa-1)$-faches Integral gegeben ist, analog wie in (2).

Vollzieht man nun den Grenzübergang zu unendlichem n derart, daß gleichzeitig mit n alle $n_1, n_2, \ldots n_\varkappa$ unbegrenzt wachsen, so ergibt sich bekanntlich eine zu (2') analoge Formel (3'), ein Gaußsches Gesetz.

Für den Fall aber, daß $(\varkappa-1)$ unter den n_i etwa $n_1, n_2, \ldots n_{\varkappa-1}$ beim Grenzübergang endlich bleiben und nur die Anzahl $n_\varkappa$ der Ziehungen einer der Kugeln etwa der $\varkappa$-ten die Größenordnung von n besitzt, können wir einen Grenzübergang analog zu (II) durchführen. Setzt man:

$$x_i = \frac{u_i}{n}, \quad (i = 1, 2, \ldots \varkappa) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathfrak{m}),$$

so wird:

$$w_n\left(\frac{u_1}{n}, \ldots \frac{u_{\varkappa-1}}{n}\right) = C_n\, v_1\left(\frac{u_1}{n}\right) \ldots v_{\varkappa-1}\left(\frac{u_{\varkappa-1}}{n}\right)\left(\frac{u_1}{n}\right)^{n_1} \ldots \left(\frac{u_{\varkappa-1}}{n}\right)^{n_{\varkappa-1}} \left(\frac{n}{n - (u_1 + \ldots + u_{\varkappa-1})}\right)^{n_1 + \ldots + n_{\varkappa-1}} \left(1 - \frac{u_1 + \ldots u_{\varkappa-1}}{n}\right)^{n} \quad (\mathfrak{n}).$$

Läßt man jetzt n unbegrenzt wachsen, während alle $|u_i|$ $[i = 1, 2 \ldots (\varkappa-1)]$ absolut kleiner als eine feste Zahl U_0 bleiben, so kommt

$$\lim_{n \to \infty} w_n = C_n'\, v_1(0) \ldots v_{\varkappa-1}(0)\, u_1^{n_1} \ldots u_{\varkappa-1}^{n_{\varkappa-1}} \cdot 1 \cdot e^{-(u_1 + u_2 + \ldots + u_{\varkappa-1})} \quad (\mathfrak{p}),$$

man sieht, daß rechts einfach lauter Produkte der in (c) aufgetretenen Ausdrücke erscheinen; somit ist die Konstante mittelbar bestimmt und man erhält als Resultat die Formel:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{w_n\left(\frac{u_1}{n}, \frac{u_2}{n}, \ldots \frac{u_{\varkappa-1}}{n}\right)}{n^{\varkappa-1}} = \frac{u_1^{n_1} u_2^{n_2} \ldots u_{\varkappa-1}^{n_{\varkappa-1}}}{n_1!\, n_2! \ldots n_{\varkappa-1}!} \cdot e^{-(u_1 + u_2 + \ldots + u_{\varkappa-1})} \quad (3''')$$

bzw. die Näherungsformel:

$$w_n(x_1, x_2, \ldots x_{\varkappa-1}) \sim \frac{n^{\varkappa-1}}{n_1! \ldots n_{\varkappa-1}!} (n\,x_1)^{n_1} \ldots (n\,x_{\varkappa-1})^{n_{\varkappa-1}}\, e^{-n(x_1 + \ldots x_\varkappa)} \quad (\mathrm{III}).$$

Von hier aus könnte man auf das Analogon des wichtigen allgemeinen Satzes kommen, der häufig als Laplace-Bienayméscher Satz bezeichnet wird. Setzt man — mit unsern Bezeichnungen:

$$A = \sum_{m=1}^{\varkappa} m\, a_m; \quad X = \sum_{m=1}^{\varkappa} m\, x_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathfrak{r}),$$

so wird nach der Wahrscheinlichkeitsdichte $v_n(x)$ dafür gefragt, daß die Abweichung $X - A$ des »wahren« Mittelwertes X vom »scheinbaren« A bei x liegt. Es ergibt sich bei dem üblichen Grenzübergang, daß $v_n(x)$ einem eindimensionalen Gaußschen Gesetz folgt. Die analoge Fragestellung würde in unserm Fall auf ein eindimensionales Poissonsches Gesetz führen. Doch wollen wir darauf nicht mehr eingehen.

Formeln wie (I), (II), (III) treten an Stelle der Gaußschen Formeln in Fällen, wo gewissermaßen eine Asymmetrie auftritt, wo die Verteilungsannahmen derartige sind, daß auch im Limes die Grenzverteilung nicht symmetrisch zum Mittelwert liegt. In solchen Fällen wird an Stelle des symmetrischen Gaußschen Verteilungsgesetzes ein dem Poissonschen Verteilungsgesetz (I) analoges aufzusuchen sein. 559

Analysis der möglichen Beschleunigungszustände eines komplan bewegten starren ebenen Systems.

Von **LUDWIG BURMESTER** in München.

Mit einer Tafel.

1. Erklärungen. Die Gesamtheit aller in einer Ebene liegenden Punkte, die ihre gegenseitige Lage nicht ändern, heißt ein starres ebenes System, und ein komplan bewegtes, wenn es sich in einer Ebene bewegt. In jeder augenblicklichen Bewegung des starren ebenen System bilden die Endpunkte der während eines Zeitelementes entstehenden Geschwindigkeiten der Systempunkte den Geschwindigkeitszustand und die Endpunkte der während zweier Zeitelemente entstehenden Beschleunigungen den Beschleunigungszustand dieses Systems. Fürderhin werden wir diese Endpunkte beziehlich die Geschwindigkeitspunkte und die Beschleunigungspunkte nennen.

Eine augenblickliche komplane Bewegung eines starren ebenen System wird in Fig. 1, Tafel 3 allgemein bestimmt durch zwei Systemkurven f', l', deren Krümmittelpunkte die Systempunkte F, L sind, und beziehlich an den festen Kurven φ', λ' gleiten, zu denen die Krümmittelpunkte Φ, Λ gehören. Die Systempunkte F, L bewegen sich dann auf Bahnkurven φ, λ, deren Krümmradien $F\Phi, L\Lambda$ sind. Demnach können wir während zweier Zeitelemente das Viereck $\Phi F L \Lambda$ als ein Gelenkviereck mit unveränderlichen Seitenlängen oder als ein Kurbelgetriebe betrachten, bei dem sich die Arme $\Phi F, \Lambda L$ um die festen Punkte Φ, Λ drehen und die Systemstrecke FL die Koppel ist.

Die Konstruktion der Beschleunigungen werden wir in organischem Zusammenhang mit der so kinematisch bestimmten Bewegung ableiten. In dieser Weise gelangen wir anschaulich zur Kenntnis der mannigfaltigen augenblicklichen Beschleunigungszustände und zu einer höheren Entwicklung der Kinematik, die dadurch zu höherer Anwendbarkeit befähigt wird. Denn die Darlegungen werden ergeben, daß jeder dem Systempunkt F erteilten beliebigen Beschleunignng FF_f im allgemeinen eindeutig eine Beschleunigung LL_f des Systempunktes L entspricht und umgekehrt, daß ferner die Beschleunigungspunkte der erteilten Beschleunigungen und die Beschleunigungspunkte der entsprechenden Beschleunigungen zwei affine ebene Systeme bilden, aus denen bedeutungsvolle Folgerungen hervorgehen. Bei dieser erweiterten Betrachtung sind zu unterscheiden: die wirklichen Beschleunigungen, welche bezüglich der Tangenten t_f, t_l in den Punkten F, L an den Bahnkurven φ, λ nach der Seite des Krümmittelpunktes und die uneigentlichen Beschleunigungen, welche nach der anderen Seite gewendet liegen.

Bei den Konstruktionen der Beschleunigungen wird hauptsächlich die mittlere Proportionale in Betracht kommen, und dabei aus zweien Strecken die dritte zu konstruieren; deshalb wollen wir die sich hinauf beziehenden, bekannten einfachen Konstruktionen zum leichten Verständnis der Darlegungen erörtern.

Zu der in Fig. 1 gegebenen Beschleunigung FF_f des Systempunktes F wird vermittelst der Geraden, welche durch F_f geht und ΦF im Punkte F_n senkrecht schneidet, die Normalbeschleunigung FF_n dieses Systempunktes F bestimmt. Die in der Tangende t_f liegende und beispielsweise nach rechts gerichtete Geschwindigkeit FF_v^1 des Systempunktes F ist dann die mittlere Proportionale der Strecken FF_n, $F\Phi$, also

$$\frac{FF_n}{FF_v^1} = \frac{FF_v^1}{F\Phi}, \text{ mithin folgt } FF_v^1 = \sqrt{FF_n \cdot F\Phi} \text{ und } FF_n = \frac{FF_v^{1\,2}}{F\Phi}.$$

Hiernach ergibt sich die Geschwindigkeit FF_v^1, indem auf ΦF die Strecke $FF_v = FF_n$ gemacht und über ΦF_v rechtsseitig der Halbkreis beschrieben wird, der t_f im Punkt F_v^1 schneidet. Liegt der Punkt F_n innerhalb der Strecke ΦF, dann wird durch den über ΦF beschriebenen Halbkreis, der die Gerade $F_n F_f$ im Punkt V schneidet, die Geschwindigkeit $FF_v^1 = FV$ bestimmt. Wenn die Geschwindigkeit FF_v^1 gegeben ist, erhalten wir durch die auf ΦF_v^1 Senkrechte $F_v^1 F_v$, die $F\Phi$ in F_v trifft, die Normalbeschleunigung $FF_n = FF_v$. Vermittelst der gedrehten Geschwindigkeit FF_v, die in $F\Phi$ liegend gleich FF_v^1 ist, erlangen wir die Normalbeschleunigung FF_n in einer anderen Weise: Wir ziehen durch die Punkte F_v, Φ zwei beliebige Parallele, welche von einer beliebigen durch F ge-

zogenen Gerade in den Punkten X, Y, geschnitten werden, und ferner zu $Y F_v$ die Parallele $X F_n$ bis an ΦF. Denn wegen der Proportionen

$$\frac{F F_n}{F F_v} = \frac{F X}{F Y} = \frac{F F_v}{F \Phi} \text{ ist } F F_n = \frac{\overline{F F_v}^2}{F \Phi}.$$

Wenn die Normalbeschleunigung $F F_n$ und die Geschwindigkeit $F F_v^1$ oder die gedrehte Geschwindigkeit $F F_v$ gegeben ist, so folgt umgekehrt aus diesen beiden Konstruktionen der Krümmradius $F \Phi$.

Der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Geraden ΦF, $\wedge L$ ist der Pol, um den sich das starre ebene System während eines Zeitelementes dreht; folglich gehen nach dem Pol die Normalen der Bahnkurven aller Systempunkte, und ihre Geschwindigkeiten sind proportional den Abständen der Systempunkte von dem Pol. Demnach wird durch die zu $F L$ Parallele $F_v L_v$, die $\wedge L$ in L_v trifft, die gedrehte Geschwindigkeit $L L_v$ des Systempunktes L und auf der Tangende t_l an Bahnkurve λ seine Geschwindigkeit $L L_v^1 = L L_v$ bestimmt. Ebenso ergibt sich auch für einen anderen beliebigen Systempunkt D auf der Normale $D \mathfrak{P}$ seiner Bahnkurve δ die gedrehte Geschwindigkeit $D D_v$ und auf der Tangente t_d an δ die Geschwindigkeit $D D_v^1 = D D$.

Bezeichnen wir das bewegte starre ebene System mit S und das ebene System der Endpunkte F_v, L_v, D_v, . . der gedrehten Geschwindigkeiten mit S_v, so sind die beiden Systeme S, S_v homothetisch ähnlich in bezug auf den Pol $\mathfrak{P}$ als Aehnlichkeitspunkt. Bezeichnen wir ferner das System der Geschwindigkeitspunkte F_v^1, L_v^1, D_v^1, . . mit S_v^1, dann sind S, S_v^1 ähnliche Systeme und der Pol $\mathfrak{P}$ ist ihr selbstentsprechender Punkt mit der Geschwindigkeit gleich Null. Demnach ist das System S_v^1 der ebenso bezeichnete Geschwindigkeitszustand S_v^1 des komplan bewegten Systems S, wobei für die Geschwindigkeiten gleich Null der Geschwindigkeitszustand mit S identisch ist.

Denken wir uns für den Systempunkt F auf der Tangente t_f mit der Geschwindigkeit gleich Null beginnend eine unendliche Reihe Geschwindigkeitspunkte F, F_v^1, F_v^2, . . angenommen, dann sind zu dieser Reihe die entsprechenden auf den Tangenten t_l, t_d liegenden unendlichen Reihen der Geschwindigkeitspunkte L, L_v^1, L_v^2, . . und D, D_v^1, D_v^2, . . ähnlich, mithin auch die entsprechenden Geschwindigkeitszustände S, S_v^1, S_v^2, . . ähnlich, und der Pol $\mathfrak{P}$ ist ihr gemeinsamer selbstentsprechender Punkt. Nehmen wir nun an, daß ein Geschwindigkeitspunkt sich auf einer Tangente bewegt, dann vollziehen alle Geschwindigkeitspunkte ähnliche Bewegungen auf den anderen Tangenten und der Pol $\mathfrak{P}$ bleibt unverändert. Der so entstehende Bewegungsvorgang ist die geradlinige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems, in dem der Pol ein ruhender Phasenpunkt ist[1]). Hiernach folgt:

Bei dem komplan bewegten starren ebenen System gibt es während je eines Zeitelements einfach-unendlich viele mögliche Geschwindigkeitszustände, welche die Systemphasen des geradlinig bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems sind, in dem der Pol der ruhende Phasenpunkt und das starre ebene System die anfängliche Systemphase ist.

2. Ableitung der Konstruktionen der Beschleunigung vermittelst der Geschwindigkeit. Um in Fig. 2 zu einer gegebenen Beschleunigung $F F_j$ des Systempunktes F die entsprechende Beschleunigung $L L_j$ des Systempunktes L des komplan bewegten starren ebenen Systems abzuleiten, denken wir uns diesem System eine unendlich kleine Parallelbewegung erteilt, bei der die Geschwindigkeit entgegensetzt gleich der Geschwindigkeit des Systempunktes F, und die Beschleunigung entgegensetzt gleich dessen Beschleunigung ist; dann befindet sich der Systempunkt F während zweier Zeitelemente in Ruhe, und das starre ebene System hat sich indessen um F relativ in bezug auf die anfängliche Lage $F L$ gedreht. Bei dieser Parallelbewegung ist die relative Geschwindigkeit des Systempunktes L gleich der geometrischen Summe seiner wirklichen Geschwindigkeit und der entgegengesetzten des Systempunktes F, ferner ist die relative Beschleunigung des Systempunktes L gleich der geometrischen Summe seiner wirklichen Beschleunigung und der entgegesetzten Beschleunigung des Systempunktes F.

Behufs der zu einer gegebenen Beschleunigung $F F_j$ die entsprechende $L L_j$ vermittelst der gegebenen gedrehten Geschwindigkeit $F F_v$ zu konstruieren, ziehen wir zu

[1]) Siehe L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik 1888, S. 875; ferner dessen Mitteilungen in Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1874, Bd. 19, S. 154. Civilingenieur 1878, Bd. 24, S. 152.

$F\,L$ die Parallele $F_v\,L_v$ bis an $\wedge\,L$, ferner zu $\Phi\,F$ die Parallele $L_v\,\mathfrak{L}_v$ bis an $F\,L$, dann ist $L\,\mathfrak{L}_v$ die gedrehte relative Geschwindigkeit des Systempunktes L; denn wegen $L\,\mathfrak{L}_v \equiv L\,L_v + L_v\,\mathfrak{L}_v$ und $L_v\,\mathfrak{L}_v \equiv F_v\,F$ folgt $L\,\mathfrak{L}_v \equiv L\,L_v + F_v\,L$. Um die in $F\,L$ liegende nach F gerichtete relative Normalbeschleunigung $L\,\mathfrak{L}_n$ von L zu konstruieren, errichten wir die in L auf $F\,L$ Senkrechte $L\,\mathfrak{L}_v = L\,\mathfrak{L}_v$; dann ist $L\,\mathfrak{L}_v$ die relative Geschwindigkeit von L; ferner ziehen wir die auf $F\,\mathfrak{L}_v$ Senkrechte $\mathfrak{L}_v\,\mathfrak{L}_v$ bis an $F\,L$; demnach ist die Strecke $L\,\mathfrak{L}_v = \overline{L\,\mathfrak{L}_v}^2/L\,F$, und auf $L\,F$ machen wir $L\,\mathfrak{L}_n = L\,\mathfrak{L}_v$. Vermittelst der gedrehten Geschwindigkeit $L\,L_v$ des Systempunktes L wird dessen Normalbeschleunigung $L\,L_n = \overline{L\,L_v}^2/L\,\wedge$ bestimmt, und in der auf $L\,\wedge$ in L_n senkrechten Geraden $\mathfrak{l}$ befindet sich der Beschleunigungspunkt L_j, der sich ergibt, indem wir die Strecke $\mathfrak{L}_n\,F_i \equiv F\,F_j$ machen, wobei auch die zu $F\,L$ Parallele $F_j\,F_i$ dienen kann, und dann durch F_i die auf $F\,L$ senkrechte Gerade i_i ziehen, welche die Gerade $\mathfrak{l}$ in dem Punkt L_j schneidet, ferner durch ihn die Beschleunigung $L\,L_j$ ziehen. Denn wenn wir noch die zu $F_i\,\mathfrak{L}_n$ Parallele $L_j\,\mathfrak{L}_j$ bis an die in $\mathfrak{L}_n$ auf $F\,L$ senkrechte Gerade ziehen, so wird die relative Beschleunigung $L\,\mathfrak{L}_j$ des Systempunktes L bestimmt, weil $L_j\,\mathfrak{L}_j \equiv F_j\,\mathfrak{L}_n \equiv F_j\,F$, und in den Dreieck $L\,L_j\,\mathfrak{L}_j$ die Seite $L\,\mathfrak{L}_j \equiv L\,L_j + L_j\,\mathfrak{L}_j = L\,L_j + F_j\,F$ ist. Und das entspricht jener gedachten Parallelbewegung.

Ziehen wir zu $\wedge\,L$ die Parallele $F_v\,\mathfrak{F}_v$ bis an $F\,L$, dann ist $F\,\mathfrak{F}_v$ die gedrehte relative Geschwindigkeit des sich um L drehenden Systempunktes F und seine nach L gerichtete relative Normalbeschleunigung $F\,\mathfrak{F}_n = \overline{F\,\mathfrak{F}_v}^2/F\,L$. Ferner ist wegen der kongruenten Dreiecke $F\,\mathfrak{F}_v\,F_v$, $\mathfrak{L}_v\,L\,L_v$ auch $F\,\mathfrak{F}_v \equiv \mathfrak{L}_v\,L$; mithin $F\,\mathfrak{F}_n = \mathfrak{L}_n\,L$. Die relativen Normalbeschleunigungen $F\,\mathfrak{F}_n$, $L\,\mathfrak{L}_n$ der Systempunkte F, L sind also entgegengesetzt gleich.

Umgekehrt kann auch in gleicher Weise vermittelst der gedrehten Geschwindigkeit $L\,L_v$ zu der Beschleunigung $L\,L_j$ die entsprechende $F\,F_j$ konstruiert werden.

Bei den Konstruktionen der Beschleunigungen werden behufs der Ermittelung der meistens erforderlichen relativen Normalbeschleunigungen zur Vereinfachung Gerade verwendet, die vorzugsweise in Betracht kommen. Ziehen wir in Fig. 2 zu $\wedge\,L$ die Parallele $F_v\,\mathfrak{F}_v$ bis an $F\,L$, dann besteht die Proportion

$$\frac{F\,\mathfrak{F}_v}{F\,F_v} = \frac{F\,L}{F\,\mathfrak{P}} \quad \text{und weil} \quad \frac{F\,\mathfrak{F}_n}{F\,\mathfrak{F}_v} = \frac{F\,\mathfrak{F}_v}{F\,L}$$

ist, folgt durch Multiplikation dieser Proportionen

$$\frac{F\,\mathfrak{F}_n}{F\,F_v} = \frac{F\,\mathfrak{F}_v}{F\,\mathfrak{P}};$$

mithin ist die Gerade $F_v\,\mathfrak{F}_n$ parallel $\mathfrak{F}_v\,\mathfrak{P}$.

Hiernach ergibt sich, indem wir $F_v\,\mathfrak{F}_v$ parallel $\wedge\,L$ bis an $F\,L$ und $F_v\,\mathfrak{F}_n$ parallel $\mathfrak{F}_v\,\mathfrak{P}$ bis an $F\,L$ ziehen die relative Normalbeschleunigung $F\,\mathfrak{F}_n$ des Systempunktes L, und damit wird auch die entgegengesetzt gleiche Normalbeschleunigung $L\,\mathfrak{L}_n$ des Systempunktes L bestimmt. Ferner ergibt sich, indem wir $L_v\,X$ parallel $\wedge\,F$ bis an $F\,L$ und $X\,L_n$ parallel $F\,L_v$ ziehen die Normalbeschleunigung $L\,L_n$. Somit folgt die Konstruktion vermittelst der gedrehten Geschwindigkeit $F\,F_v$ zu einer Beschleunigung $F\,F_j$ die entsprechende Beschleunigung $L\,L_j$:

a) Man ziehe $F_v\,L_v \parallel F\,L$, $L_v\,X \parallel \wedge\,F$, $X\,L_n \parallel F\,L_v$ und die in L_n auf $\wedge\,L$ senkrechte Gerade $\mathfrak{l}$, ferner $F_v\,\mathfrak{F}_v \parallel \wedge\,L$, $F_v\,\mathfrak{F}_n \parallel \mathfrak{F}_v\,\mathfrak{P}$, mache $L\,\mathfrak{L}_n = \mathfrak{F}_n\,F$ und $\mathfrak{L}_n\,F_i \equiv F\,F_j$, ziehe dann durch F_i die auf $F\,L$ senkrechte Gerade i_i, die $\mathfrak{l}$ in L_j schneidet, und die Beschleunigung $L\,L_j$.

Um eine andere Konstruktion abzuleiten, wenn der Pol $\mathfrak{P}$ nicht erreichbar ist, ziehen wir zu $F_v\,L$ die Parallele $\mathfrak{F}_v\,\mathfrak{P}_f$ bis an $\Phi\,F$, dann sind die Vierecke $\mathfrak{F}_n\,F_v\,\mathfrak{F}_v\,\mathfrak{P}_f$, $\mathfrak{F}_v\,\mathfrak{P}\,L\,F_v$ homothetisch in bezug auf F als Aehnlichkeitspunkt; folglich ist $\mathfrak{P}_f\,\mathfrak{F}_n$ parallel $\mathfrak{F}_v\,F_v$ und $L\,\wedge$. Ferner ziehen wir $\mathfrak{P}_f\,\mathfrak{P}_l$ parallel $F\,L$ bis an $\wedge\,L$ und $\mathfrak{P}_l\,\mathfrak{L}_n$ parallel $F\,\Phi$, dann sind die Dreiecke $L\,\mathfrak{L}_n\,\mathfrak{P}_l$, $\mathfrak{F}_n\,F\,\mathfrak{P}_f$ kongruent und $L\,\mathfrak{L}_n$ ist gleich $F_n\,F$. Hiernach ergibt sich die Konstruktion, die teils mit der vorigen übereinstimmt.

b) Man ziehe $F_v\,L_v \parallel F\,L$, $L_v\,X \parallel \wedge\,F$, $X\,L_n \parallel F\,L_v$ und die in L_n auf $\wedge\,L$ senkrechte Gerade $\mathfrak{l}$, ferner $F_v\,\mathfrak{F}_v \parallel \wedge\,L$, $\mathfrak{F}_v\,\mathfrak{P}_f \parallel F_v\,L$, $\mathfrak{P}_f\,\mathfrak{P}_l \parallel F\,L$ und $\mathfrak{P}_l\,\mathfrak{L}_n \parallel F\,\Phi$, mache $\mathfrak{L}_n\,F_i \equiv F\,F_j$, ziehe dann durch F_i die auf $F\,L$ senkrechte Gerade i_i, die $\mathfrak{l}$ in L_j schneidet, und die Beschleunigung $L\,L_j$[1]).

[1]) F. Wittenbauer hat in seiner Graphischen Dynamik 1923, S. 87 zwei andere Konstruktionen vermittelst der Geschwindigkeit mit Hilfe des Beschleunigungsplanes abgeleitet und dann in jenes anfangs erwähntes Kurbelgetriebe eingefügt.

Diese beiden Konstruktionen können umgekehrt von $L\,L_j$ zu $F\,F_j$ in analoger Weise ausgeführt werden.

Zu erwähnen ist noch, daß aus jenen homothetisch ähnlichen Vierecken die Proportion $F\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_f : F\,F_v = F\,F_v : F\,\mathfrak{P}$ folgt, mithin $F\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_f = \overline{F\,F_v}^2 / F\,\mathfrak{P}$ und analog $L\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_l = \overline{L\,L_v}^2 / L\,\mathfrak{P}$ ist. Wenn insonderheit der Drehpol $\mathfrak{P}$ während zweier Zeitelemente in Ruhe ist, können die Strecken $F\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_f$, $L\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_l$ als die Normalbeschleunigungen der Systempunkte F, L betrachtet werden.

3. Ableitung der Konstruktionen der Beschleunigung vermittelst der Normalbeschleunigung. In Fig. 2 ist die Beschleunigung $F\,F_j$ gegeben, und die durch F_j gehende auf $\Phi\,F$ senkrechte Gerade $\mathfrak{f}$ bestimmt die Normalbeschleunigung $F\,F_n$. Um die Beschleunigung $L\,L_j$ zu konstruieren, ziehen wir zu $\wedge\,L$ die Parallele $F_n\,N_f$ bis an $F\,L$, dann sind wegen der Parallelen $F_n\,N_f$, $F_v\,\mathfrak{F}_v$ auch $F_v\,N_f$, $\Phi\,\mathfrak{F}_v$ parallel. Hiernach folgt die Proportion:

$$\frac{F\,F_v}{F\,\Phi} = \frac{F\,N_f}{F\,\mathfrak{F}_v}.$$

Aus jenen bezüglich F homothetisch ähnlichen Vierecken $\mathfrak{F}_n\,F_v\,\mathfrak{F}_v\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_f$, $\mathfrak{F}_v\,\mathfrak{P}\,L\,F_v$ ergibt sich die Proportion

$$\frac{F\,\mathfrak{F}_n}{F\,F_v} = \frac{F\,\mathfrak{F}_v}{F\,\mathfrak{P}},$$

und durch Multiplikation der beiden Proportionen folgt

$$\frac{F\,\mathfrak{F}_n}{F\,\Phi} = \frac{F\,N_f}{F\,\mathfrak{P}};$$

mithin ist $\mathfrak{F}_n\,\Phi$ parallel $N_f\,\mathfrak{P}$.

Hiernach erhalten wir die in Fig. 3 ausgeführten Konstruktion der Beschleunigung $L\,L_j$ vermittelst der Normalbeschleunigung $F\,F_n$.

α) Man ziehe durch F_j die auf $\Phi\,F$ senkrechte Gerade $\mathfrak{f}$ bis an F_n, ferner $F_n\,N_f \parallel \wedge\,L$, $\Phi\,\mathfrak{F}_n \parallel N_f\,\mathfrak{P}$, mache auf $F\,L$ nach F gerichtet $L\,\mathfrak{L}_n = \mathfrak{F}_n F$, ziehe $\mathfrak{P}\,N_l \parallel \mathfrak{L}_n\,\wedge$, $N_l\,L_n \parallel \Phi\,F$ und die in L_n auf $\wedge\,L$ senkrechte Gerade $\mathfrak{l}$, mache $\mathfrak{L}_n\,F_i \equiv F\,F_j$, ziehe dann durch F_i die auf $F\,L$ senkrechte Gerade i_l, die $\mathfrak{l}$ in L_j schneidet, und die Beschleunigung $L\,L_j$.

Diese vornehmliche, anschauliche Konstruktion, die erste ohne Verwendung der Geschwindigkeit, hat Th. Pöschl in anderer Weise zuerst abgeleitet[1]). Da diese Konstruktion bei nicht erreichbarem Pol versagt, so ist es notwendig, noch eine andere abzuleiten, die den Pol nicht erfordert, und diese ergibt sich in der folgenden einfachen Weise.

In Fig. 2 ist $\mathfrak{F}_v\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_f$ parallel $F_v\,L$ und $\Phi\,\mathfrak{F}_v$ parallel $F_v\,N_f$; dann bestehen die Projektionen

$$\frac{F\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_f}{F\,\mathfrak{F}_v} = \frac{F\,F_v}{F\,L}, \qquad \frac{F\,\mathfrak{F}_v}{F\,N_f} = \frac{F\,\Phi}{F\,F_v}$$

und beide multipliziert geben die Projektion

$$\frac{F\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_f}{F\,N_f} = \frac{F\,\Phi}{F\,L};$$

mithin ist $N_f\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_f$ parallel $\Phi\,L$.

Hiernach erlangen wir die in Fig. 4 ausgeführte Konstruktion der Beschleunigung $L\,L_j$.

β) Man ziehe durch F_j die auf $\Phi\,F$ senkrechte Gerade $\mathfrak{f}$ bis an F_n, ferner $F_n\,N_f \parallel \wedge\,L$, $N_f\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_f \parallel \Phi\,L$, ${}^{2}\!\mathfrak{f}_f\,{}^{2}\!\mathfrak{f}_l \parallel F\,L$, ${}^{2}\!\mathfrak{f}_l\,N_l \parallel F\,\wedge$, $N_l\,L_n$ und ${}^{2}\!\mathfrak{f}_l\,\mathfrak{L}_n \parallel F\,\Phi$, dann die in F_n auf $\wedge\,L$ senkrechte Gerade $\mathfrak{l}$, mache $\mathfrak{L}_n\,F_i \equiv F\,F_j$, ziehe durch F_i die auf $F\,L$ senkrechte Gerade i_l, die $\mathfrak{l}$ in L_j schneidet, und die Beschleunigung $L\,L_j$.

Diese beiden Konstruktionen, die auch umgekehrt werden können, gelten nicht nur für die nach der Seite des Krümmittelpunktes gewendeten, wirklichen Beschleunigungen, sondern auch für die nach der anderen Seite gewendeten, uneigentlichen Beschleunigungen.

In Fig. 5 ist zu einer uneigentlichen Beschleunigung $F\,F_j$, die beispielsweise der in Fig. 4 entgegengesetzt gleich ist, mit übereinstimmender Bezeichnung die entsprechende uneigentliche Beschleunigung $L\,L_j$ konstruiert.

Wir nehmen noch in Abb. 5 eine in der Tangente t_j der Bahnkurve q liegende Beschleunigung $F\,F_j^t$ an, bei der also die Normalbeschleunigung gleich Null ist, dann liegt

[1]) Th. Pöschl, Zeitschrift für angewandte Mathematik nnd Mechanik, Bd. 3 (1923), S. 130.

demgemäß auch die entsprechende Beschleunigung $L\,L_j'$ in der Tangente t_l der Bahnkurve λ, und jene relative Normalbeschleunigung $L\,\mathfrak{L}_n$ ist auch gleich Null, mithin liegt der Punkt $\mathfrak{L}_n$ in L. Um in diesem besonderen Fall, der im Anfang und am Ende der Bewegung des starren ebenen System eintritt, die Beschleunigung $L\,L_j'$, wie strichpunktiert erkenntlich ist, zu konstruieren, machen wir $L\,F_i' = F\,F_j'$ und ziehen die auf $F\,L$ Senkrechte $F_i\,L_j'$ bis an t_l. Die Dreiecke $\mathfrak{P}\,F\,L$, $L\,F_i'\,L_j'$ sind wegen derer entsprechenden aufeinander senkrechten Seiten ähnlich, und demnach folgt die Proportion $F\,F_j' : L\,L_j' = \mathfrak{P}\,F : \mathfrak{P}\,L$ ebenso wie für die Geschwindigkeiten der Systempunkte F, L. Diese besonderen wirklichen Beschleunigungen $F\,F_j'$, $L\,L_j'$ bilden die Scheide zwischen den wirklichen und den uneigentlichen Beschleunigungen.

Bei den Konstruktionen der Beschleunigung handelt es sich hauptsächlich um die Normalbeschleunigung $L\,L_n$ und die relative Normalbeschleunigung $L\,\mathfrak{L}_n$ des Systempunktes L. Die beiden können auch in freier Weise vermittelst der Geschwindigkeiten und der Krümmittelpunkte Φ, $\wedge$ zweckmäßig konstruiert werden, wenn in jenen Konstruktionen ungenaue Schnittpunkte der Hilfsgeraden vorkommen.

4. Die Affinität der entsprechenden Beschleunigungspunkte. Denken wir uns dem Systempunkt F des bewegten starren ebenen Systems beliebig viele Beschleunigungen erteilt, dann entspricht den Konstruktionen gemäß jedem Beschleunigungspunkt für F eindeutig ein Beschleunigungspunkt für L. Jene bilden in ein ebenes System, das wir mit $\mathfrak{S}^F$ und diese ein ebenes System, das wir mit $\mathfrak{S}^L$ bezeichnen. In den beiden ebenen Systemen sind wegen der Beschleunigungen gleich Null auch F, L entsprechende Punkte.

Die beiden Konstruktionen $\alpha)$ $\beta)$ der Beschleunigungen erfordern nur das Ziehen paralleler Geraden zu bestimmten Geraden. Demnach entspricht in Fig. 4 einer Reihe von Beschleunigungspunkten auf der Geraden $\mathfrak{f}$ eine ähnliche auf der Geraden $\mathfrak{l}$ und einer Reihe von Beschleunigungspunkten auf einer beliebigen Geraden f eine ähnliche auf der Geraden l. Denken wir uns parallele Gerade gezogen, welche zwei Geraden f, f' in Punktreihen schneiden, dann entspricht der Punktreihe auf f eine ähnliche auf l und der Punktreihe auf f' eine ähnliche auf l'; folglich entsprechen diesen parallelen Geraden in $\mathfrak{S}^F$ auch parallele Gerade in $\mathfrak{S}^L$. Sonach ergibt sich der allgemeine Satz:

Bei dem komplan bewegten starren ebenen System bilden die Beschleunigungspunkte der einem Systempunkt erteilten Beschleunigungen und die entsprechenden Beschleunigungspunkte der Beschleunigungen für einen entsprechenden Systempunkt zwei affine ebene Systeme.

In diesen affinen Systemen entsprechen sich die Geraden $F\,\Phi$, $L\,\wedge$ nicht, also auch die auf ihnen liegenden ähnlichen Punktreihen $F, F_n \ldots$ und $L, L_n, \ldots$ nicht; dagegen sind aber die in deren Punkten auf $F\,\Phi$, $L\,\wedge$ Senkrechten entsprechende Geraden.

Diese eigenartige besondere Affinität, die gestützt ist auf die vier Punkte Φ, F, L, $\wedge$ und durch jene Konstruktionen definiert wird, nennen wir die kinematische Affinität.

In Fig. 6 nehmen wir in den affinen Systemen $\mathfrak{S}^F$, $\mathfrak{S}^L$ die entsprechenden Paare $F\,F_j^1$, $F\,F_j^2$ und $L\,L_j^1$, $L\,L_j^2$ als gegeben an, dann sind dadurch diese beiden Systeme bestimmt; mithin enstprechen sich die Parallelogramme $F\,F_j^1\,F_j^2\,F_j^d$, $L\,L_j^1\,L_j^2\,L_j^d$. Um zu einem beliebigen Beschleunigungspunkt F_j^z, dessen Koordinaten $F\,X_f$, $F\,Y_f$ sind, den entsprechenden Beschleunigungspunkt L_j^z zu konstruieren, machen wir $L\,X_l\,L_j^1$ ähnlich $F\,X_f\,F_j^1$ und $L\,Y_l\,L_j^2$ ähnlich $F\,Y_f\,F_j^2$; dann wird L_j^z auch durch die Koordinaten $L\,X_l$, $L\,Y_l$ bestimmt.

Behufs der Konstruktion des selbstentsprechenden Punktes der affinen Systeme $\mathfrak{S}^F$, $\mathfrak{S}^L$ ziehen wir durch die Schnittpunkte U_f^1, U_f^2 der entsprechenden Parallelenpaare $F\,F_j^1$, $F_j^2\,F_j^d$ und $L\,L_j^1$, $L_j^2\,L_j^d$ eine Gerade, ferner durch die Schnittpunkte U_l^1, U_l^2 der entsprechenden Parallelenpaare $F_j^1\,F_j^d$, $F\,F_j^2$ und $L_j^1\,L_j^d$, $L\,L_j^2$ eine Gerade; dann schneiden sich diese beiden Geraden in dem selbstentsprechenden Punkt $\mathfrak{W}$. Demnach werden die gedachten Geraden $F\,\mathfrak{W}$, $L\,\mathfrak{W}$ von den zu $F\,L$ Parallelen in ähnlichen Reihen entsprechender Beschleunigungspunkte geschnitten.

5. Die Beschleunigungszustände als Phasen geradlinig bewegter ähnlichveränderlicher ebener Systeme. Die zu dem während zweier Zeitelemente bewegten starren ebenen System S gehörenden Beschleunigungspunkte bilden ein ähnliches

ebenes System S_j, welches der ebenso bezeichneter Beschleunigungszustand S_j ist. Der selbstentsprechende Punkt dieser ähnlichen Systeme S, S_j, der keine Beschleunigung hat, heißt der Beschleunigungspol. Wenn zu einer Beschleunigung $F F_j$ die entsprechende Beschleunigung $L L_j$ konstruiert ist, so wird durch die ensprechenden Strecken $F L$, $F_j L_j$ zu dem System S das ähnliche S_j und der Beschleunigungszustand bestimmt. Dem Systempunkt F können zweifach-unendlich viele Beschleunigungen erteilt werden, und jeder dieser Beschleunigungen entspricht ein Beschleunigungszustand. Demnach folgt der Satz:

Bei einem komplan bewegten starren ebenen System gibt es während je zweier Zeitelemente zweifach-unendlich viele mögliche Beschleunigungszustände.

Um eine Einsicht in diese Mannigfaltigkeit der Beschleunigungszustände zu erlangen und sie gleichsam zu entfalten, müssen wir zuvörderst den Beschleunigungspol konstruieren. In Fig. 7 nehmen wir die Beschleunigungen $F F_j$, $L L_j$ als gegeben an, bezeichnen den Schnittpunkt der Geraden $F F_j$, $L L_j$ mit G und den Schnittpunkt der Geraden $F L$, $F_j L_j$ mit H. Die um die vier Dreiecke $G F_j L_j$, $G F L$, $H F F_j$, $H L L_j$ beschriebenen Kreise k_1, k_2, k_3, k_4 mit den Mittelpunkten m_1, m_2, m_3, m_4 schneiden sich in dem mit $\mathfrak{S}$ bezeichneten Beschleunigungspol, dem selbstentsprechenden Punkt der durch die Strecken $F L$, $F_j L_j$ bestimmten ähnlichen Systeme S, S_j; und die vier Mittelpunkte liegen auf einem durch $\mathfrak{S}$ gehenden Kreis mit dem Mittelpunkt μ[1]). Der Beschleunigungspol ergibt sich also als Schnittpunkt zweier dieser Kreise. Die Winkel $F \mathfrak{S} L$, $F_j \mathfrak{S} L_j$ sind gleich $F G L$, und die Winkel $\mathfrak{S} F F_j$, $\mathfrak{S} L L_j$, die Beschleunigungswinkel genannt werden, sind gleich, weil sie auf einem Bogen $\mathfrak{S} G$ des Kreises k_2 stehen. Ferner sind die Dreiecke $\mathfrak{S} F L$, $\mathfrak{S} F_j L_j$ ähnlich.

Eine Gerade, in der eine oder mehrere Beschleunigungen eines Systempunktes liegen, nennen wir eine Richtgerade. Denken wir uns für den Systempunkt F auf einer Richtgeraden f, mit der Beschleunigung gleich Null beginnend, eine unendliche Reihe Beschleunigungspunkte $F, F_j^1, F_j^2, \ldots$ angenommen, dann entspricht ihr für den Systempunkt L auf einer Richtgeraden l eine ähnliche unendliche Reihe $L, L_j^1, L_j^2, \ldots$, und das nämliche gilt für je zwei entsprechende Richtgeraden. Für die Beschleunigung gleich Null ist der Beschleunigungszustand identisch mit dem starren ebenen System S. Sonach werden durch diese beiden ähnlichen Reihen die ähnlichen Beschleunigungszustände $S, S_j^1, S_j^2, \ldots$ bestimmt.

Nehmen wir nun an, daß in F beginnend auf der Richtgeraden f ein Beschleunigungspunkt bewegt wird, dann erfolgt auf der entsprechenden Richtgeraden l eine ähnliche Bewegung. So entsteht ein auf Richtgeraden bewegtes ähnlich-veränderliches ebenes System, in dem der ruhende Phasenpunkt der gemeinsame Beschleunigungspol und das starre ebene System S die anfängliche Systemphase ist. Die Gesamtheit dieser einfach-unendlich vielen Systemphasen nennen wir eine richtgerade Systemphasenschar und die Gesamtheit der zugehörigen Beschleunigungszustände eine richtgerade Beschleunigungszuständenschar; ferner nennen wir die Gesamtheit der Richtgeraden, auf denen sich die Systempunkte des ähnlich-veränderlichen Systems bewegen, einen Richtgeradenkomplex. Sonach erhalten wir den Satz:

Die zweifach-unendlich vielen möglichen Beschleunigungszustände eines augenblicklich komplan bewegten starren ebenen Systems bestehen aus einfach-unendlich vielen richtgeraden Beschleunigungszuständenscharen, in denen je ein Beschleunigungspol der gemeinsame selbstentsprechende Punkt ist; und alle Beschleunigungsstände sind Systemphasen des auf je einem der einfach-unendlich vielen Richtgeradenkomplexe bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems, und das starre ebene System ist die anfängliche Systemphase.

Eine Gerade, in der mehrere Endpunkte der Beschleunigungen liegen, welche eine gemeinsame Normalbeschleunigung $F F_n$ haben, nennen wir eine Normalgerade. Denken wir uns analog, wie vorhin, für den Systempunkt F auf einer Normalgeraden $\mathfrak{f}$ eine unendliche Reihe Beschleunigungspunkte $F_j^I, F_j^{II}, \ldots$ angenommen, dann entspricht ihr für den Systempunkt L auf einer Normalgeraden $\mathfrak{l}$ eine ähnliche unendliche Reihe $L_j^I, L_j^{II}, \ldots$

[1]) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 805.

und das nämliche gilt für je zwei entsprechende Normalgeraden. Sonach werden durch diese beiden ähnlichen Reihen die ähnlichen Beschleunigungszustände S_j^I, S_j^{II}, . . bestimmt, in denen der gemeinsame selbstentsprechende Punkt der Beschleunigungspunkt des als Systempunkt betrachteten Poles ist; und seine Beschleunigung liegt in der Geraden, die in ihm auf der Polbahntangente senkrecht ist und wird durch die zu der Normalgeraden $\mathfrak{f}$ gehörenden Normalbeschleunigung bestimmt.

Nehmen wir nun an, daß auf der Normalgeraden $\mathfrak{f}$ ein Beschleunigungspunkt bewegt wird, dann erfolgt auf der entsprechenden Normalgeraden $\mathfrak{l}$ eine ähnliche Bewegung. So entsteht ein auf Normalgeraden bewegtes ähnlich-veränderlich ebenes System, in dem der ruhende Phasenpunkt der Beschleunigungspunkt des Poles ist, und welches dem starren ebenen System ähnlich ist. Die Gesamtheit dieser einfach-unendlich vielen Systemphasen nennen wir eine normalgerade Systemphasenschar und die Gesamtheit der zugehörigen Beschleunigungszustände eine normalgerade Beschleunigungszuständenschar; ferner nennen wir die Gesamtheit der normalgeraden, auf denen sich die Systempunkte des ähnlich-veränderlichen Systems bewegen, einen Normalgeradenkomplex. Sonach folgt der Satz:

Die zweifach-unendlich vielen möglichen Beschleunigungszustände eines augenblicklich komplan bewegten starren ebenen Systems bestehen aus einfach-unendlich vielen normalgeraden Beschleunigungszuständenscharen, in denen der Beschleunigungspunkt des Poles der gemeinsame selbstentsprechende Punkt ist; und alle Beschleunigungszustände sind Systemphasen des auf je einen der einfach-unendlich vielen Normalgeradenkomplexe bewegten ähnlich-veränderlichem ebenem System, das dem starren ebenen System ähnlich ist.

Nach dieser Ordnung der zweifach-unendlich vielen Beschleunigungszustände in richtgeraden und in normalgeraden Beschleunigungszuständenscharen befindet sich jeder Beschleunigungszustand in der einen und in der anderen; gleichsam wie jedes Quadrat auf einem quadratisch linierten Blatt zu einer wagerechten und zu einer lotrechten Reihe gehört, aber bei dieser Metapher ist zu bedenken, daß jedes Quadrat einen unbegrenzten Beschleunigungszustand vertritt.

6. Beziehungen der Beschleunigungszustände und Folgerungen. Die weitere Darlegung in Fig. 8 erfordert zunächst die Konstruktion des Wendekreises, der durch das Kurbelgetriebe $\Phi F L \wedge$ bestimmt ist. Die beiderseits verlängerte Koppel FL schneidet die Gerade $\Phi \wedge$ linksseitig im Punkt $\mathfrak{Q}$ und die durch den Pol $\mathfrak{P}$ gehende zu $\Phi \wedge$ Parallele rechtsseitig in dem entfernten Punkt $\mathfrak{U}$. Durch $\mathfrak{U}$ ziehen wir die zu $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ Parallele, welche die Geraden ΦF, $\wedge L$ beziehlich in den Punkten $F_n^{\mathfrak{w}}$, $L_n^{\mathfrak{w}}$ schneidet, ferner durch $F_n^{\mathfrak{w}}$ die auf ΦF Senkrechte $\mathfrak{f}^{\mathfrak{w}}$ und durch $L_n^{\mathfrak{w}}$ die auf $\wedge L$ Senkrechte $\mathfrak{l}^{\mathfrak{w}}$; dann schneiden sich diese beiden Senkrechten in dem Wendepol $\mathfrak{W}$, und $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ ist der auf Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ senkrechte Durchmesser des Wendekreises $\mathfrak{w}$ [1]). Wenn die Punkte $\mathfrak{Q}, \mathfrak{U}$ nicht erreichbar sind, verfahren wir, um jene Senkrechten $\mathfrak{f}^{\mathfrak{w}}, \mathfrak{l}^{\mathfrak{w}}$ zu erhalten, in anderer Weise. Da $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ parallel $\mathfrak{Q}\Phi$ und $\mathfrak{U}F_n^{\mathfrak{w}}$ parallel $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ ist, so sind die Punktgebilde $\mathfrak{U}, \mathfrak{P}, F, F_n^{\mathfrak{w}}$ und $\mathfrak{Q}, \Phi, F, \mathfrak{P}$ ähnlich; folglich besteht die Proportion

$$\frac{F F_n^{\mathfrak{w}}}{F\mathfrak{P}} = \frac{F\mathfrak{P}}{F\Phi}, \quad \text{mithin ist} \quad F F_n^{\mathfrak{w}} = \frac{\overline{F\mathfrak{P}}^2}{F\Phi}.$$

Hiernach wird die Strecke $F F_n^{\mathfrak{w}}$ und analog die Strecke $L L_n^{\mathfrak{w}}$ konstruiert. Diese Strecken sind somit die Normalbeschleunigungen der Systempunkte F, L für die gedrehten Geschwindigkeiten $F\mathfrak{P}$, $L\mathfrak{P}$, und $\mathfrak{f}^{\mathfrak{w}}, \mathfrak{l}^{\mathfrak{w}}$ sind entsprechende Normalgeraden in den affinen Systemen $\mathfrak{S}^F, \mathfrak{S}^L$.

Die gesamten Richtgeraden für den Systempunkt F bilden einen Richtgeradenbüschel $F(f^1, f^2, . .)$, zu dem wir den affin entsprechenden Richtgeradenbüschel $L(l^1, l^2, . .)$ konstruieren wollen. Die in den Endpunkt F_n^I einer Normalbeschleunigung des Systempunktes F senkrechte Normalgerade $\mathfrak{f}^I$ schneidet fünf Richtgerade f^1, f^2, f^3, f^4, f^5 in den gegebenen Beschleunigungspunkten $F_j^{1\,I}, F_j^{2\,I}, F_j^{3\,I}, F_j^{4\,I}, F_j^{5\,I}$, die beispielsweise so gewählt

[1]) L. Burmester, Kinematik, S. 122, Fig. 140.

sind, daß $F_j^{2\,I}$ in der verlängerten Geraden FL liegt, und der wegen des geringen Platzes nicht eingezeichnete Punkt $F_j^{4\,I}$ mit F_n^I vereint ist, daß ferner alle sich in gleichen Abständen befinden.

Behufs der Bestimmung der entsprechenden Richtgeraden l^1, l^2, l^3, l^4, l^5 verfahren wir nach der Konstruktion β, wie die übereinstimmende Bezeichnung zeigt, und strichpunktiert gekennzeichnet ist. Dadurch erhalten wir die in L_n^I auf $\wedge L$ senkrechte Normalgerade $\mathfrak{l}^I$ und den Punkt $\mathfrak{L}_n$. Sodann machen wir $\mathfrak{L}_n F_i^1 = F F_j^{1\,I}$, ziehen die durch F_i^1 gehende zu $\mathfrak{f}^I$ Parallele $F_i^1 F_i^5$ und durch die in der Reihe auf $\mathfrak{f}^I$ liegende Punkte die zu $F_j^{1\,I} F_i^1$ Parallelen, welche die kongruente Reihe der Punkte $F_i^1, F_i^2, F_i^3, F_i^4, F_i^5$ liefern; ferner ziehen wir durch diese Punkte Senkrechte auf F, L, welche die Normalgerade $\mathfrak{l}^I$ in den Beschleunigungspunkten $L_j^{1\,I}, L_j^{2\,I}, L_j^{3\,I}, L_j^{4\,I}, L_j^{5\,I}$ schneiden, wie z. B. die durch $F^{1\,I}$ gehende Senkrechte i_l^1, die den Punkt $L_j^{1\,I}$ auf $\mathfrak{l}^I$ bestimmt, somit ergeben sich die Richtgeraden l^1, l^2, l^3, l^4, l^5.

Die auf dem Wendekreis $\mathfrak{w}$ liegenden Systempunkte durchschreiten während zweier Zeitelemente Wendepunkte ihrer Bahnkurven; demnach hat jeder dieser Systempunkte eine Tangentialbeschleunigung, die wie seine Geschwindigkeit in der Wendetangente seiner Bahnkurve liegt, und durch den Wendepol $\mathfrak{W}$ geht. Auf dem Wendekreis liegt jeder einer gegebenen Richtgeraden entsprechender Beschleunigungspol, weil er keine Beschleunigung hat.

Um den Beschleunigungspol $\mathfrak{J}^1$ zu konstruieren, welcher der Richtgeraden f^1 entspricht, ziehen wir durch den Wendepol $\mathfrak{W}$ die zu f^1 Parallele $\mathfrak{W} K^1$, die den Wendekreis $\mathfrak{w}$ im Punkt K^1 schneidet, und die Gerade $K^1 F$, die ihn in den Beschleunigungspol $\mathfrak{J}^1$ trifft [1]). Denn die Beschleunigung des Systempunktes K^1 liegt in der Geraden $K^1 \mathfrak{W}$ und folglich sind wegen der Parallelen $f^1, K^1 \mathfrak{W}$ die Beschleunigungswinkel $\mathfrak{J} F f^1, \mathfrak{J} K^1 \mathfrak{W}$ gleich. So sind die den Richtgeraden f^1, f^2, f^3, f^4, f^5 entsprechenden, auf dem Wendekreis liegenden Beschleunigungspole $\mathfrak{J}^1, \mathfrak{J}^2, \mathfrak{J}^3, \mathfrak{J}^4, \mathfrak{J}^5$ konstruiert, welche die selbstentsprechenden Punkte der sich auf die Richtgeradenpaare $f^1 l^1, f^2 l^2, f^3 l^3, f^4 l^4, f^5 l^5$ beziehende, richtgeraden Beschleunigungszuständenscharen sind.

Für die durch den Wendepol $\mathfrak{W}$ gehende Richtgerade $f^{\mathfrak{w}}$ ist nach dieser Konstruktion der Wendepol der entsprechende Beschleunigungspol, und der zugehörige Beschleunigungswinkel gleich Null; demnach gehen die durch die Richtgerade $f^{\mathfrak{w}}$ für alle Systempunkte bestimmten Richtgeraden, die einen besonderen Richtgeradenkomplex bilden, durch den Wendepol $\mathfrak{W}$. Die von den Systempunkten F, L nach $\mathfrak{W}$ gehende Richtgeraden $f^{\mathfrak{w}}, l^{\mathfrak{w}}$ sind entsprechende Richtgeraden in den affinen Systemen $\mathfrak{S}^F, \mathfrak{S}^L$. Da ferner auch die entsprechenden Normalgeraden $\mathfrak{f}^{\mathfrak{w}}, \mathfrak{l}^{\mathfrak{w}}$ durch den Wendepol gehen, so ist er der selbstentsprechende Punkt dieser Systeme. Hiernach ergibt sich der bedeutsame Satz:

In der kinematischen Affinität ist der Wendepol der selbstentsprechende Punkt.

Der Tangente t_f an der Bahnkurve φ des Systempunktes F als Richtgerade entspricht die Tangente t_l an der Bahnkurve λ des Systempunktes L als Richtrichtgerade. Der durch t_f bestimmte Beschleunigungspol liegt nach der obigen Konstruktion in dem Pol $\mathfrak{P}$, und der Beschleunigungswinkel ist gleich 90^0. Zu den über F verlängerten Richtgeraden gehören stumpfe Beschleunigungswinkel und dieselben Beschleunigungspole $\mathfrak{J}^1, \mathfrak{J}^2, \ldots$, die also auch für die uneigentlichen Beschleunigungen gelten. Umgekehrt erhalten wir z. B. den der Richtgeraden l^1 auch entsprechenden Beschleunigungsgol $\mathfrak{J}^1$, indem wir die zu l^1 Parallele $\mathfrak{W} K^I$ bis an den Wendekreis $\mathfrak{w}$ ziehen, und ferner die Gerade $K^I L$, die ihn in $\mathfrak{J}^1$ trifft. Hiernach kann vermittelst der Beschleunigungspole zu einem der affinen Richtgeradenbüschel $F(f^1, f^2, \ldots)$ und $L(l^1, l^2, \ldots)$ der andere konstruiert werden: Wir ziehen z. B. zu der Richtgeraden f^1 die Parallele $\mathfrak{W} K^1$ und die Gerade $K^1 F$, die nach $\mathfrak{J}^1$ geht, ferner die Gerade $\mathfrak{J}^1 L$, die den Wendekreis in K^I trifft; dann ist die entsprechende Richtgerade l^1 parallel $\mathfrak{W} K^I$.

---

[1]) Diese sehr einfache Konstruktion hat F. Wittenbauer zuerst mitgeteilt im Civilingenieur, 1896, Bd. XLII, S. 57, und auch in seiner Graphischen Dynamik, S. 37.

Die Gerade FL schneidet den Wendekreis $\mathfrak{w}$ in zwei Punkten, die doppelt bezeichnet sind; der eine mit $\mathfrak{I}', K''$ und der andere mit $\mathfrak{I}'', K'$. Betrachten wir $\mathfrak{I}'$ als einen Beschleunigungspol, dann gehören zu ihm für die Punkte F, L die entsprechenden Richtgeraden, die zu $\mathfrak{W}K'$ parallel sind wegen der gleichen Beschleunigungswinkel. Betrachten wir auch $\mathfrak{I}''$ als einen Beschleunigungspol, dann gehören zu ihm ebenso zwei entsprechende Richtgeraden, die zu $\mathfrak{W}K''$ parallel sind. Demnach ist der von den beiden affinen Richtgeradenbüscheln erzeugt gedachte Kegelschnitt, der durch die Punkte F, L, $\mathfrak{W}$ und den Schnittpunkt 0 der Tangenten t_f, t_l geht, wenn die Gerade FL den Wendekreis schneidet, eine Hyperbel, deren Asymptoten zu den Geraden $\mathfrak{W}K'$, $\mathfrak{W}K''$ parallel sind. Berührt die Gerade FL den Wendekreis, daun liegen diese beiden Geraden vereint in der vom Berührpunkt nach dem Wendepol gehenden Gerade, und der Kegelschnitt ist eine Parabel, deren Achse zu dieser Geraden parallel ist. Wenn die Gerade FL den Wendekreis nicht schneidet, so sind die Geraden $\mathfrak{W}K'$, $\mathfrak{W}K''$ imaginär und der Kegelschnitt ist eine Ellipse.

Um nach den beiden Konstruktionen der entsprechenden Richtgeraden der affinen Richtgeradenbüschel noch eine dritte auszuführen, bezeichnen wir die Beschleunigungspunkte, in denen die Normalgerade $\mathfrak{f}^{\mathfrak{w}}$ den Richtgeradenbüschel $F(\mathfrak{f}^1, \mathfrak{f}^2, \ldots)$ schneidet, mit $F_j^{1\,\mathfrak{w}}, F_j^{2\,\mathfrak{w}}, F_j^{3\,\mathfrak{w}}, F_j^{4\,\mathfrak{w}}, F_j^{5\,\mathfrak{w}}$ und die Beschleunigungspunkte, in denen die Normalgerade $\mathfrak{l}^{\mathfrak{w}}$ den Richtgeradenbüschel $L(\mathfrak{l}^1, \mathfrak{l}^2, \ldots)$ schneidet mit $L_j^{1\,\mathfrak{w}}, L_j^{2\,\mathfrak{w}}, L_j^{3\,\mathfrak{w}}, L_j^{4\,\mathfrak{w}}, L_j^{5\,\mathfrak{w}}$. Da sich in dem Wendepol $\mathfrak{W}$ als selbstentsprechender Punkt zwei entsprechende Punkte dieser ähnlichen Reihen befinden, so sind die Geraden $F_j^{1\,\mathfrak{w}}\,\boldsymbol{L}_j^{1\,\mathfrak{w}}, F_j^{2\,\mathfrak{w}}\,L_j^{2\,\mathfrak{w}}, \ldots$ parallel und senkrecht auf FL, wie sich aus der allgemeinen Konstruktion β ergibt. Indem wir also diese auf FL Senkrechte ziehen, erhalten wir durch die Beschleunigungspunkte $L_j^{1\,\mathfrak{w}}, L_j^{2\,\mathfrak{w}}, \ldots$ den Richtgeradenbüschel $L(\mathfrak{l}^1, \mathfrak{l}^2, \ldots)$.

In den Punkten I, II auf Geraden $\mathfrak{W}\,O$ schneiden sich beziehlich die auf ΦF in den Punkten F_n^I, F_n^{II} senkrechten Normalgeraden $\mathfrak{f}^I$, $\mathfrak{f}^{II}$ und die auf $\wedge L$ in den Punkten L_n^I, L_n^{II} senkrechten Normalgeraden $\mathfrak{l}^I$, $\mathfrak{l}^{II}$; denn sie sind entsprechende Gerade in den affinen Systems $\mathfrak{S}^F$, $\mathfrak{S}^L$. Die affinen Richtgeradenbüschel $F(f^1, f^2, \ldots)$, $L(\mathfrak{l}^1, \mathfrak{l}^2, \ldots)$ werden von $\mathfrak{f}^I$, $\mathfrak{l}^I$ beziehlich in den entsprechenden ähnlichen Reihen der Beschleunigungspunkte $F_j^{1\,I}, F_j^{2\,I}, F_j^{3\,I}, F_j^{4\,I}, F_j^{5\,I}$ und $L_j^{1\,I}, L_j^{2\,I}, L_j^{3\,I}, L_j^{4\,I}, L_j^{5\,I}$ geschnitten, ferner von $\mathfrak{f}^{II}, \mathfrak{l}^{II}$ beziehlich in den entsprechenden ähnlichen Reihen der Beschleunigungspunkte $F_j^{1\,II}$, $F_j^{2\,II}, F_j^{3\,II}, F_j^{4\,II}, F_j^{5\,II}$ und $L_j^{1\,II}, L_j^{2\,II}, L_j^{3\,II}, L_j^{4\,II}, L_j^{5\,II}$. Nach dieser Bezeichnungsweise wird die sich auf die Richtgeraden f^1, l^1 beziehende richtgerade Beschleunigungszuständeschar durch die ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{I}^1 F L, \mathfrak{I}^1 F_j^{1\,I} L_j^{1\,I}, \mathfrak{I}^1 F_j^{1\,II} L_j^{1\,II}, \mathfrak{I}^1 F_j^{1\,w} L_j^{1\,w}$ veranschaulicht, wenn man diese Dreiecke auf ein besonderes Blatt zeichnet; ebenso auch die sich auf f^2, l^2 beziehende richtgerade Beschleunigungszuständeschar durch die ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{I}^2 F L$, $\mathfrak{I}^2 F_j^{2\,I} L_j^{2\,I}$ $\mathfrak{I}^2 F_j^{2\,II} L_j^{2\,II}$, $\mathfrak{I}^2 F_j^{2\,w} L_j^{2\,w}$.

Die in den von F und L nach dem Wendepol $\mathfrak{W}$ gehenden Richtgeraden f^w, l^w befindlichen ähnlichen Reihen der entsprechenden Beschleunigungspunkte liegen, in Parallelen zu FL, weil $\mathfrak{W}$ ein selbstentsprechender Punkt ist. Demnach entsteht für diese besonderen entsprechenden Richtgeraden eine homothetische richtgerade Beschleunigungszuständenschar von der ein Beschleunigungszustand in dem Wendepol zusammenschrumpft.

Die Beschleunigungen des als Systempunkt betrachteten, auf den Wendekreis befindlichen Poles $\mathfrak{P}$ liegen auf dem Durchmesser $\mathfrak{P}\,\mathfrak{W}$, und werden bestimmt durch die zu $F\,L\,\mathfrak{P}$ ähnlichen Dreiecke $F_j^I\,L_j^I\,\mathfrak{P}_j^I$, $F_j^{II}\,L_j^{II}\,\mathfrak{P}_j^{II}$, und $F_j^{1\,w}\,\boldsymbol{L}_j^{1\,\mathfrak{w}}\,\mathfrak{W}$. Denn dieses letzte ist auch ähnlich zu $F\,L\,\mathfrak{P}$, weil ihre homologen Seiten aufeinander senkrecht sind; und folglich ist der Wendepol der Beschleunigungspunkt des Poles $\mathfrak{P}$ für $F_j^{1\,w}\,L_j^{1\,w}$. Ferner werden die Punkte $\mathfrak{P}^I, \mathfrak{P}^{II}$ auch auf $\mathfrak{P}\,\mathfrak{W}$ durch den Winkel $\mathfrak{P}\,\mathfrak{I}^1\,\mathfrak{P}^I = F\,\mathfrak{I}^1\,F_j^{1\,I}$ und $\mathfrak{P}\,\mathfrak{I}^2\,\mathfrak{P}^{II} = F\,\mathfrak{I}^2\,F_j^{1\,II}$ bestimmt. Da die in $\mathfrak{P}$ und F beginnenden Reihen der Beschleunigungspunkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_j^I, \mathfrak{P}_j^{II}, \mathfrak{W}$ und $F, F_j^{1\,I}, F_j^{1\,II}\,F_j^{1\,w}$ ähnlich sind, ferner die zweite ähnlich $F, F_n^I, F_n^{II}\,F_n^w$ ist, so kann die erste als ähnliche zu dieser letzten konstruiert werden. Dadurch wird die Bestimmung der Punkte $\mathfrak{P}_j^I, \mathfrak{P}_j^{II}$, vereinfacht, die beziehlich den Normalbeschleunigungen

$F F_n^I$, $F F_n^{II}$ entsprechen. Demnach ist in jeder normalgeraden Beschleunigungszuständenschar der selbstentsprechende Punkt der betreffende in der Geraden $\mathfrak{P}\,\mathfrak{W}$ liegende Beschleunigungspunkt des Poles $\mathfrak{P}$. Und beispielsweise wird der Punkt $\mathfrak{P}_j^I$ auch durch die Proportion $\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_j^I : \mathfrak{P}\,\mathfrak{W} = F F_n : F F_n^w$ bestimmt.

Die sich auf die Normalgeraden $\mathfrak{f}^I$, $\mathfrak{l}^I$ beziehende normalgeraden Beschleunigungszuständenschar wird durch die ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{P}\,F\,L$, $\mathfrak{P}_j^I F_j^{1\,I} L_j^{1\,I}$, $\mathfrak{P}_j^I F_j^{2\,I} L_j^{2\,I}$, $\mathfrak{P}_j^I F_j^{3\,I} L_j^{3\,I}$, . . in der oben erwähnten Weise veranschaulicht, ebenso die sich auf $\mathfrak{f}^{II}$, $\mathfrak{l}^{II}$ beziehende normalgerade Beschleunigungszuständenschar durch die ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{P}\,F\,L$, $\mathfrak{P}_j^{II} F_j^{1\,II}, L_j^{1\,II}, \mathfrak{P}^{II} F_j^{2\,II}, L_j^{2\,II}, \mathfrak{P}^{II} F_j^{3\,II} L_j^{3\,II}$.

Die Richtgeraden f^w, l^w schneiden die Normalgeraden $\mathfrak{f}^I$, $\mathfrak{l}^I$ beziehlich in den entsprechenden Beschleunigungspunkten F_j^I, L_j^I und die Strecke $F_j^I\,L_j^I$ ist parallel $F\,L$; demnach sind in dem punktiert gezeichneten Dreieck $\mathfrak{P}^I F_j^I L_j^I$, welches dem Dreieck $\mathfrak{P}\,F\,L$ in bezug auf $\mathfrak{W}$ homothetisch ähnlich ist, und die Seiten $\mathfrak{P}^I F^I$, $\mathfrak{P}^I L^I$ beziehlich senkrecht auf $\mathfrak{f}^I$, $\mathfrak{l}^I$. Dieses Dreieck ist somit das kleinste von jenen Dreiecken in der sich auf $\mathfrak{f}^I$, $\mathfrak{l}^I$ beziehenden normalgeraden Beschleunigungszuständenschar, und folglich hat sich der dadurch bestimmte Beschleunigungszustand am dichtesten zusammengezogen. Das nämliche gilt von dem punktiert gezeichneten Druck $\mathfrak{P}^{II} F_j^{II} L_j^{II}$ in der sich auf $\mathfrak{f}^{II}$, $\mathfrak{l}^{II}$ beziehenden normalgeraden Beschleunigungszuständenschar.

Die entsprechenden Beschleunigungspunkte in den durch $\mathfrak{W}$ gehenden Normalgeraden $\mathfrak{f}^w$, $\mathfrak{l}^w$ liegen in Parallelen, die senkrecht auf $F\,L$ sind; demnach bezieht sich auf diese Normalgeraden eine homothetische normalgerade Beschleunigungszuständenschar, von der ein Beschleunigungszustand in dem Wendepol zusammenschrumpft, und dieser Beschleunigungszustand gehört als solcher zu der homothetischen richtgeraden und zu der homothetischen normalgeraden Beschleunigungszuständenschar.

Die Tangenten t_f, t_l sind zugleich entsprechende besondere Normalgeraden und Richtgeraden; demnach sind die hierauf sich beziehende beiden normalgeraden und richtgeraden Beschleunigungszuständenscharen identisch.

Da durch die Normalbeschleunigung eines Systempunktes ein Geschwindigkeitszustand und eine normalgerade Beschleunigungszuständenschar bestimmt wird, so folgt der Satz:

Zu allen Beschleunigungszuständen in einer normalgeraden Beschleunigungszuständenschar gehört ein einziger Geschwindigkeitszustand[1]).

Danach sind die normalgeraden Beschleunigungszuständenscharen bedeutsam verschieden von den richtgeraden Beschleunigungszuständenscharen, in denen jedem Beschleunigungszustand ein Geschwindigkeitszustand entspricht. Ferner ersehen wir aus den abgeleiteten Beziehungen, daß bei jenen die Beschleunigungspunkte die ganzen unendlich langen Normalgeraden, und bei diesen die Beschleunigungspunkte die von den Systempunkten ins Unendliche gehenden Richtgeraden erfüllen.

Es ist noch der Gleichenkreis $\mathfrak{g}^1$ zu erwähnen, dessen Durchmesser $\mathfrak{P}\,\mathfrak{G}^1$ durch die Geraden $\mathfrak{W}\,\mathfrak{J}^1$ bestimmt wird, welche die Polbahntangente $\mathfrak{t}$ im Punkt $\mathfrak{G}^1$ schneidet. Auf dem Gleichenkreis befinden sich alle Systempunkte, die nur Normalbeschleunigung haben, und demnach in zwei aneinanderliegende gleiche Elemente ihrer Bahnkurven durchschreiten[2]). Die Normalbeschleunigungen dieser Systempunkte liegen in Geraden, die durch den Pol $\mathfrak{P}$ und die Geschwindigkeiten in Geraden, die durch $\mathfrak{G}^1$ gehen. Jedem Beschleunigungspol entspricht ein Gleichenkreis, dessen Durchmesser in der Polbahntangente

---

[1]) Auf diese Beziehung hat F. Wittenbauer in seiner Graphischen Dynamik S. 29 andeutungsweise hingewiesen, indem er schreibt: Für einen bestimmten Geschwindigkeitszustand des starren Systems bilden die Beschleunigungspunkte aller möglichen Beschleunigungszustände ähnliche Punktreihen. „Den Wert dieser Ueberlegung werden wir erst später kennen lernen; die Aehnlichkeit der Punktreihen der Beschleunigungspunkte wird uns eine reiche Anzahl von Anwendungen ermöglichen".

[2]) Die vorkommende Benennung für den Gleichenkreis „Tangentialkreis" ist nicht zutreffend, weil nicht die Tangente, sondern die Normale der Bahnkurve in Betracht kommt, und „Wechselkreis" ist falsch, wahrscheinlich entstanden nach einem Irtum in W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. 1879. Bd. I, S. 452.

t liegt. Die Normalbeschleunigung $D^1 D_j^1$ des Systempunktes D^1 wird auf $\mathfrak{P} D^1$ bestimmt durch den Beschleunigungswinkel $D^1 \mathfrak{I}^1 D_j^1 = F \mathfrak{I}^1 F_j^{1\prime}$. Alle Beschleunigungspunkte für die Systempunkte des Gleichenkreises befinden sich dann auf dem durch die Punkte $\mathfrak{I}^1$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_j^I$ gehenden, nicht eingezeichneten Kreis, auf dem also auch der Punkt D_j^1 liegt.

In Fig. 8a nehmen wir an, daß ein Wendekreis $\mathfrak{w}$ mit seinem Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ und zwei Systempunkte F, L gegeben sind. Um vermittelst des Beschleunigungspoles zu einer Beschleunigung FF_j die entsprechende LL_j zu konstruieren, wird durch die zu FF_j Parallele $\mathfrak{W}K$ und die Gerade KF der Beschleunigungspol $\mathfrak{I}$ bestimmt; und dann ist zu dem Dreieck $\mathfrak{I}FL$ das ähnliche Dreieck $\mathfrak{I}F_jL_j$ zu zeichnen. Wir beschreiben um $\mathfrak{I}$ mit den Radien $\mathfrak{I}F$, $\mathfrak{I}L$ Kreisbögen, von denen der erste die Gerade $\mathfrak{I}F_j$ im Punkt ζ, der zweite sie im Punkt η trifft und die Gerade $\mathfrak{I}F$ im Punkt σ schneidet, sodann machen wir den Kreisbogen $\eta\varrho = \sigma L$, ziehen die Gerade $\mathfrak{I}\varrho$ und zu $\zeta\varrho$ die Parallele F_jL_j bis an $\mathfrak{I}\varrho$.

Die kinematische Affinität der Systeme $\mathfrak{S}^F$, $\mathfrak{S}^L$ ist nach dieser Darlegung auf die vier Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{W}, FL$ gegründet wobei der Wendekreis $\mathfrak{w}$ mit seinem Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ gegeben ist, und wird durch die Konstruktion der Beschleunigung LL_j, die FF_j entspricht, definiert.

Das hierzu gehörende Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$ kann nach Fig. 8 konstruiert werden. Wenn wir dort die vier Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{W}, F, L$ als gegeben annehmen, indem wir von dem Punkt $\mathfrak{W}$ auf die Geraden $\mathfrak{P}F$, $\mathfrak{P}L$ die Senkrechten fällen und durch ihre Fußpunkte F_n^w, L_n^w die Gerade ziehen, welche die Gerade FL im Punkt $\mathfrak{U}$ schneidet, ferner durch $\mathfrak{P}$ die zu $F_n^w L_n^w$ Parallele, welche die Gerade FL im Punkt $\mathfrak{D}$ trifft, und durch $\mathfrak{D}$ die zu $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ Parallele, welche die beiden Geraden $\mathfrak{P}F$, $\mathfrak{P}L$ beziehlich in den Punkten Φ, Λ schneidet. Dadurch ist das Kurbelgetriebe eindeutig bestimmt.

In Fig. 8b sind für die Systempunkte F, L, D die Beschleunigungspunkte F_j, L_j, D_j angenommen, und das Dreiek $F_jL_jD_j$ ist dem Dreieck FLD ähnlich. Von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{D}$ ziehen wir die Strecken $\mathfrak{D}F\iota = FF_j$, $\mathfrak{D}L\iota = LL_j$, $\mathfrak{D}D\iota = DD_j$, dann ist das Dreieck $F\iota L\iota D\iota$ dem Dreieck FLD ähnlich. Das ebene System der Punkte $F\iota, L\iota D\iota, \ldots$, welches also dem starren ebenen System $FLD, \ldots$ ähnlich ist, wird dessen Beschleunigungsplan genannt. Der zugehörige Beschleunigungspol $\mathfrak{I}$ ergibt sich durch das Dreieck $F_jL_j\mathfrak{I}$, welches dem Dreieck $F\iota L\iota\mathfrak{D}$ ähnlich ist[1]).

In Fig. 8c sind auf den beiden von den Systempunkte F und L ausgehenden Richtgeraden, die sich im Punkt G schneiden, die ähnlichen Reihen der entsprechenden Beschleunigungspunkte $F, F_j^1, F_j^2, F_j^3, \ldots$ und $L, L_j^1, L_j^2, L_j^3, \ldots$ angenommen. Dadurch wird eine sich auf diese Richtgeraden beziehende richtgerade Beschleunigungszuständenschar bestimmt. Die Kreise k^1, k^2, k^3, k^4, welche durch entsprechenden Beschleunigungspunkte und den Punkt G gehen schneiden sich in dem Beschleunigungspol $\mathfrak{I}$. Auf der zu einem Systempunkt D gehörenden Richtgeraden ist noch eine zu jenen Reihen ähnliche Reihe $D, D_j^1, D_j^2, D_j^3, \ldots$ gezeichnet. Wenn wir diese Beschleunigungszustände als Systemphasen eines geradlinigt bewegten, ähnlich-veränderlichen Systems betrachten, so sind die Kreise $k, k^1, k^2, k^3, \ldots$ Kreisphasen mit dem ruhenden Phasenpunkt $\mathfrak{I}$ und gleiten durch den festen Punkt G hindurch. Dabei bilden die Punkte der Kreisphasen ähnliche Punktreihen auf Geraden die durch G gehen, wie z. B. die punktierte Gerade zeigt. Zu den Reihen der Beschleunigungspunkte sind in dem Beschleunigungsplan die von Punkt $\mathfrak{D}$ ausgehenden entsprechenden Punktreihen gezeichnet. Demnach verwandelt sich eine richtgerade Beschleunigungszuständenschar in dem Beschleunigungsplan in eine homothetische, und ebenso auch eine normalgerade Beschleunigungszuständenschar in eine homothetische. Damit ergeben sich in dem Beschleunigungsplan folgenreiche Beziehungen, die hier nicht weiter erörtert werden.

In Fig. 9 ist die wichtige Bobilliersche Konstruktion ausgeführt, nach der ein Kurbelgetriebe durch andere Kurbelgetriebe ersetzt werden kann, die während zweier Zeitelemente den gleichen Bewegungsvorgang bewirken. Bei dem Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$ wird durch die symmetrisch gleichen, mit τ bezeichneten Winkel $L\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, $F\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ die Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ bestimmt. Man zieht durch einen beliebigen Punkt D die Gerade $\mathfrak{P}D$, macht den Winkel $D\mathfrak{P}\mathfrak{D}'$ symmetrisch gleich den Winkel $F\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, zieht die Gerade FD,

[1]) L. Burmester, Kinematik. S. 805.

welche die Gerade $\mathfrak{P}\,\Omega'$ im Punkt Ω' trifft, ferner die Gerade $\Omega'\,\Phi$, welche die Gerade $\mathfrak{P}\,D$ in Punkt Δ schneidet; dann entstehen die beiden geforderten Kurbelgetriebe $\Phi\,F\,D\,\Delta$ und $\wedge\,L\,D\,\Delta$. Bei diesem letzten liegt der Schnittpunkt Ω'' der beiden Geraden $\wedge\,\Delta$, $L\,D$ in der Geraden $\Omega\,\Omega'$, weil die Paare der entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke $\Delta\,\Phi\,\wedge$, $D\,F\,L$ in je einer durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden liegen, und ferner ist der Winkel $D\,\mathfrak{P}\,\Omega'' = F\,\mathfrak{P}\,\Omega$.

Wenn der Punkt D auf einer der Geraden $\mathfrak{P}\,\Phi$, $\mathfrak{P}\,\wedge$ liegt, wie z. B. in Fig. 9a auf $\mathfrak{P}\,\Phi$; dann sind die Punktreihen $\mathfrak{P}$, D, F, . . und $\mathfrak{P}$, Δ, Φ, . . projektiv. Um zu dem Punkt D den entsprechenden Δ zu konstruieren, ziehen wir durch $\mathfrak{P}$ zwei beliebige Gerade g, h und von einem beliebigen auf h liegenden Punkt Ω die Geraden $\Omega\,F$, $\Omega\,\Phi$, welche die Gerade g in den Punkten I, II schneiden, ferner durch die Punkte D, I die Gerade bis an Ω_d auf h und durch die Punkte Ω_d, II die Gerade, welche den Punkt Δ bestimmt, Zu einem unendlich fernen auf der Geraden $\mathfrak{P}\,\Phi$ liegenden Punkt Δ'_∞ ergibt sich durch die zu $\mathfrak{P}\,\Phi$ Parallele $II\,\Omega'$ und die Gerade $\Omega'\,I$ der entsprechende Punkt D'.

7. Besondere Fälle der Beschleunigungszustände. a) In Fig. 10 liegt der Pol $\mathfrak{P}_\infty$ im Unendlichen und folglich sind die Geraden $\Phi\,F$, $\wedge\,L$ parallel. Der durch $\mathfrak{P}_\infty$ gehende Wendekreis entartet in eine Gerade $\mathfrak{w}$, die zu jenen beiden Geraden parallel ist und $\Phi\,\wedge$ im Punkt χ schneidet, der durch Strecke $\wedge\,\chi = \Omega\,\Phi$ bestimmt wird [1]). Demnach befindet sich der Wendepol auch im Unendlichen. Aus der Konstruktion des in Fig. 8 auf dem Wendekreis $\mathfrak{w}$ liegenden Beschleunigungspoles $\mathfrak{I}^1$ folgt, wenn wir uns dort auf der Geraden $\Phi\,F$ den Pol $\mathfrak{P}$ nebst der auf der Richtgeraden f^1 Senkrechten $\mathfrak{P}\,K^1$ ins Unendliche bewegt denken, vergrößert sich der durch $\mathfrak{I}^1\,\mathfrak{P}$ gehende Wendekreis und entartet in die zu $\Phi\,F$ paralleler Gerade $\mathfrak{I}^1\,\mathfrak{P}_\infty$, dabei dreht sich die Gerade $\mathfrak{I}^1\,K^1$ um F, während K^1 ins Unendliche gelangt und $\mathfrak{I}^1\,F$ stellt sich senkrecht auf f^1; folglich ist in Fig. 10 der Beschleunigungswinkel gleich 90^0, und in diesem besonderen Fall erfolgt das seltsame Ergebnis, das nicht nur für eine Richtgerade, sondern für alle durch F gehenden Richtgeraden und also für alle Beschleunigungspole der Beschleunigungswinkel 90^0 ist.

Die Systempunkte F, L bewegen sich während eines Zeitelementes auf den parallelen Tangenten t_f, t_l der Bahnkurven φ, λ; demnach sind die Geschwindigkeiten $F\,F_v$, $L\,L_v$ gleich und die Normalbeschleunigungen $F\,F_n = \overline{F\,F_v}^2/F\,\Phi$, $L\,L_n = \overline{L\,L_v}^2/L\,\wedge$. Somit besteht die Proportion

$$\frac{F\,F_n}{L\,L_n} = \frac{L\,\wedge}{F\,\Phi}.$$

Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden $F\,L$, $\mathfrak{w}$ mit $\mathfrak{I}^n$, dann ist $L\,\Omega = \mathfrak{I}^n\,F$, $F\,\Omega = \mathfrak{I}^n\,L$ und wegen

$$\frac{L\,\wedge}{F\,\Phi} = \frac{L\,\Omega}{F\,\Omega} = \frac{\mathfrak{I}^n\,F}{\mathfrak{I}^n\,L}$$

folgt

$$\frac{F\,F_n}{L\,L_n} = \frac{\mathfrak{I}^n\,F}{\mathfrak{I}^n\,L}.$$

Demnach wird die Normalbeschleunigung $L\,L_n$ durch den Schnitt L_n der Geraden $F_n\,\mathfrak{I}^n$ und $L\,\wedge$ bestimmt, und somit ergeben sich die in F_n, L_n beziehlich auf $\Phi\,F$, $L\,\wedge$ senkrechten entsprechenden Normalgeraden $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$. Wir wollen nun für diesen besonderen Fall zwei Konstruktionen angeben, um zu einer Beschleunigung $F\,F_j^1$ die entsprechende $L\,L_j^1$ zu bestimmen.

Da die Geschwindigkeiten $F\,F_v$, $L\,L_v$ gleich sind, so ist die relative Geschwindigkeit des Systempunktes F gleich Null und mithin auch seine relative Normalbeschleunigung gleich Null, so ergibt sich zu einer Beschleunigung $F\,F_j^1$ die entsprechende, indem wir $L\,F_i^1 = F\,F_j^1$ machen und $F_i^1\,L_j^1$ senkrecht $F\,L$ bis an $\mathfrak{l}$ ziehen. Sonach erhalten wir die Konstruktion:

Man mache $L\,\mathfrak{I}^n = \Omega\,F$, ziehe $F_n\,\mathfrak{I}^n$, die $L\,\wedge$ in L_n schneidet, und die in L_n auf $L\,\wedge$ Senkrechte $\mathfrak{l}$, mache $L\,F_i^1 = F\,F_j^1$ und ziehe durch F_i^1 die auf $F\,L$ Senkrechte, die $\mathfrak{l}$ in L_j trifft.

[1]) L. Burmester, Kinematik S. 101, Fig. 114.

Eine andere Konstruktion vermittelst des Beschleunigungspoles $\mathfrak{J}^1$ lautet:

Man mache $L\,\mathfrak{J}^n = \Omega\,F$, ziehe $F_n\,\mathfrak{J}^n$, die $L\,\Lambda$ in L_n schneidet, und die in L_n auf $L\,\Lambda$ Senkrechte $\mathfrak{l}$, ferner $\mathfrak{J}^n\,\mathfrak{w}$ parallel $L\,\Lambda$, dann die auf $F\,F^1$ Senkrechte $F\,\mathfrak{J}^1$ und die auf $\mathfrak{J}^1\,L$ in L Senkrechte, die $\mathfrak{l}$ in L_j trifft.

In gleicher Weise ist vermittelst des Beschleunigungspoles $\mathfrak{J}^2$ zu der Beschleunigung $F\,F_j^2$ die entsprechende $L\,L_j^2$ konstruiert.

Der Endpunkt der Beschleunigung des als Systempunkt betrachteten Poles liegt wie dieser im Unendlichen, und ist der selbstentsprechender Punkt aller Beschleunigungszustände der sich auf den parallelen Normalgeraden $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$ beziehenden normalgeraden Beschleunigungszuständenschar. Demnach sind die Strecken $F_j^1\,L_j^1$, $F_j^2\,L_j^2$ parallel und gleich, mithin die entsprechenden Reihen der Beschleunigungspunkte $F_j^1, F_j^2, \ldots$ und $L_j^1, L_j^2, \ldots$ kongruent. Somit folgt, daß alle diese Beschleunigungszustände kongruent sind und parallel liegen, und zu ihnen gehört der einzige durch die Strecke $F_v\,L_v$ bestimmte Geschwindigkeitszustand von der einfach-unendlich vielen kongruenten, parallel liegenden Geschwindigkeitszuständen.

Der von den affinen Richtgeradenbüscheln $F(f^1, f^2, \ldots)$, $L(l^1, l^2, \ldots)$ erzeugte Kegelschnitt wäre eine Hyperbel, deren Asymptoten senkrecht auf den Geraden $F\,L$, $F\,\Phi$ sind. Die kinematische Affinität ist dadurch gekennzeichnet, daß der selbstentsprechende Punkt, der Wendepol im Unendlichen liegt, und daß die Geraden, welche durch die auf je zwei entsprechenden Normalgeraden liegenden Beschleunigungspunkte gehen, parallel sind.

Wenn der Punkt Λ im Unendlichen liegt, fällt die Gerade $\mathfrak{w}$ mit der Geraden $L\,\Lambda_\infty$ und die Normalgerade $\mathfrak{l}$ mit der Tangente t_l zusammen. Die dann in t_l liegende Beschleunigung, welche der Beschleunigung $F\,F_j^1$ entspricht, ergibt sich, indem wir $F\,F_i^1 = F\,F_j^1$ machen und durch F^1 die auf $F\,L$ senkrechte Gerade bis an t_l ziehen wie es gestrichelt angedeutet ist.

b) In Fig. 11 liegen $\Phi\,F$, $F\,L$ in einer Geraden und der Pol $\mathfrak{P}$ liegt in dem Systempunkt L. Das Kurbelgetriebe $\Phi\,F\,L\,\Lambda$ befindet sich in einer Totlage; denn durch Drehung von $\Lambda\,L$ ist keine Bewegung des starren ebenen Systems möglich. Der Punkt Ω liegt in Φ, und demnach die Polbahntangente $\mathfrak{t}$ in $\Lambda\,L$. Der Systempunkt L sowie der Pol $\mathfrak{P}$ als Systempunkt betrachtet sind während eines Zeitelementes in Ruhe und bewegen sich in dem folgenden auf der Tangente t_l der Bahnkurve λ.

Mit der Beschleunigung $F\,F_j$ auf der Richtgeraden f ist die Normalgerade $\mathfrak{f}$ und die Normalbeschleunigung $F\,F_n$ gegeben. Um zu der Beschleunigung $F\,F_j$ die entsprechende $L\,L_j$ in t_l zu konstruieren, wie die strichpunktierten Geraden zeigen, wird zunächst die durch $F\,F_n$ bestimmte Geschwindigkeit $F\,F_v$ durch den über $\Phi\,F_v$ beschriebenen Halbkreis ermittelt. Da die Geschwindigkeit des Systempunktes L gleich Null ist, so ist die Größe seiner relativen Geschwindigkeit gleich $F\,F_v$ und seine in $F\,L$ liegenden relative Normalbeschleunigung $L\,\mathfrak{L}_n$ ergibt sich, indem wir auf $F_v\,L$ die Senkrechte $F_v\,r$ bis an $\Phi\,L$ ziehen und die Strecke $F\,r$ nach $L\,\mathfrak{L}_n$ abtragen. Sodann machen wir $\mathfrak{L}_n\,F_i \equiv F\,F_j$, ziehen durch F_i die auf $F\,L$ senkrechte Gerade i_l, die t_l in dem Beschleunigungspunkt L_j schneidet und $F\,L$ im Punkt ε trifft. Wegen der kongruenten Dreiecke $\mathfrak{L}_n\,\varepsilon\,F_i$, $F\,F_n\,F_j$ ist die Strecke $F_j\,F_i$ parallel und gleich $F\,L_n$; demnach erhalten wir auch durch $F_j\,F_i \equiv F\,\mathfrak{L}_n$ und die durch F_i gehende auf $F\,L$ senkrechte Gerade i_l, die t_l in L_j schneidet, die Beschleunigung $L\,L_j$.

Allen Richtgeraden für F entspricht die Gerade t_1 als die einzige Richtgerade für L_1 und allen auf $\Phi\,F$ senkrechten Normalgeraden entspricht t_l auch als die einzige auf $\Lambda\,L$ senkrechte Normalgerade. Demnach entartet die kinematische Affinität der Systeme $\mathfrak{S}^F$, $\mathfrak{S}^L$, so daß das System $\mathfrak{S}^L$ in der Geraden t_l zusammenschrumpft und allen Beschleunigungspunkten in jeder auf $\Phi\,F$ senkrechten Normalgeraden ein einziger Beschleunigungspunkt auf t_l entspricht.

Jeder in einer Richtgeraden des Richtgeradenbüschels für F liegende Reihe von Beschleunigungspunkten entspricht eine ähnliche Reihe von Beschleunigungspunkten in der Geraden t_l, weil in dieser die Richtgeraden der affin entsprechenden Richtgeradenbüschel für L gleichsam fächerartig zusammenschlagen.

Da der Pol $\mathfrak{P}$ als Systempunkt und der Systempunkt L vereint sind, so ist die Beschleunigung $\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_j$ identisch mit $L\,L_j$, und L_j ist auch der selbstentsprechender Punkt

in der sich auf die Normalgerade $\mathfrak{f}$ und den Punkt L_j beziehende Beschleunigungszuständenschar, in der jeder Beschleunigungszustand durch je eine von L_j an $\mathfrak{f}$ gehende Strecke und der zugehörige einzige Geschwindigkeitszustand durch die Strecke $L F_v$ bestimmt wird.

Der Durchmesser $\mathfrak{P}\,\mathfrak{W}$ des Wendekreises $\mathfrak{w}$ liegt in der auf der Polbahntangente $\mathfrak{t}$ Senkrechten t_l und ergibt sich, indem wir auf ΦF die Strecke $F F_n^{\mathfrak{w}} = \overline{F\mathfrak{P}}^2/\Phi F$ machen und die auf ΦF Senkrechte $F_n^{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{W}$ bis an t_l ziehen. Nach der S. 511 abgeleiteten Proportion $\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_j : \mathfrak{P}\,\mathfrak{W} = F F_n : F F_n^{\mathfrak{w}}$ kann dann der mit $\mathfrak{P}_j$ identische Beschleunigungspunkt L_j auch vermittelst der Normalbeschleunigung $F F_n$ ohne die Geschwindigkeit $F F_v$ bestimmt werden. Durch die zu der Richtgeraden f parallele $\mathfrak{W} K$ bis an den Wendekreis $\mathfrak{w}$ und die Gerade KF ergibt sich der Beschleunigungspol $\mathfrak{I}$. Da die Dreiecke $\mathfrak{I} F_j L_j$, $\mathfrak{P} F L$ ähnlich sind, so erhalten wir auch vermittelst des Beschleunigungspoles $\mathfrak{I}$ den Beschleunigungspunkt L_j auf t_l, indem wir den Winkel $F_j \mathfrak{I} L_j$ gleich $F \mathfrak{I} L$ machen. Bei allen diesen Konstruktionen des Beschleunigungspunktes L_j kommt die Lage des Punktes Λ auf der Polbahntangente $\mathfrak{t}$ gar nicht in Betracht, und er kann sich auch im Unendlichen befinden.

Um die augenblickliche Bewegung des starren ebenen Systems durch ein anderes Kurbelgetriebe $\Phi F D \Delta$ zu ersetzen, ziehen wir nach der Bobillierschen Konstruktion durch einen beliebigen Systempunkt D die Gerade $\mathfrak{P} D$, machen den Winkel $D \mathfrak{P} \Omega'$ symmetrisch gleich dem Winkel $\Phi \mathfrak{P}\,\mathfrak{t}$, wobei Ω' auf der Geraden $F D$ liegt, ziehen die Gerade $\Phi \Omega'$, welche die Gerade $\mathfrak{P} D$ im Punkt Δ schneidet. Sonach kann in bezug auf dieses Kurbelgetriebe die Beschleunigung $D D_j$ konstruiert werden; dann sind die Dreiecke $D_j F_j L_j$, $D F L$ ähnlich. Durch dieses Kurbelgetriebe wird die Bewegung stetig über jene Totlage geführt, wenn das Glied ΔD bewegt wird.

c) In Fig. 12 liegen alle vier Glieder des Kurbelgetriebes $\Phi F L \Lambda$ in einer Geraden g, und es befindet sich in einer Durchschlagslage. Je nachdem von den beiden Systempunkten F, L der eine oder der andere voreilend gleichzeitig in die Durchschlagslage gelangen, kommt von den zwei auf der Geraden g liegenden Polen $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ der eine oder andere in Betracht. Diese beiden Pole sind die Doppelpunkte der durch die konjugierten Punktpaare Φ, L und Λ, F bestimmten involutarischen Punktreihe, und liegen harmonisch zu diesen Punktpaaren[1]).

Behufs der Konstruktion der Pole $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ beschreiben wir über ΛF den Halbkreis k und um einen in der auf ΦL Mittelsenkrechten s weit nach oben liegenden Punkt o den durch die Punkte Φ, L gehenden Kreisbogen $\mathfrak{k}$, der den Halbkreis k in den Punkten G, H schneidet, ziehen die Sekante GH, welche die Gerade g im Punkt O trifft, und von O an k die Tangente OT; sodann beschreiben wir um O mit dem Radius OT den Kreisbogen ω, der die Gerade g in den Polen $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ schneidet. Hiernach nehmen wir in bezug auf $\mathfrak{P}'$ für den Systempunkt F die auf g senkrechte Geschwindigkeit $F F_v$ an, ziehen die Gerade $\mathfrak{P}' F_v$, durch welche die auf g senkrechte Geschwindigkeit $L L_v$ des Systempunktes L bestimmt wird. Damit ist das Erforderliche für die weitere Darlegung gegeben.

Durch die auf ΦF_v Senkrechte $F_v F_\nu$, welche die Gerade g in F_ν trifft, wird die Normalbeschleunigung $F F_n^I = F F_\nu$ bestimmt, und durch die auf ΛL_v Senkrechte $L_v L_\nu$ bis an g wird die Normalbeschleunigung $L L_n^I = L L_\nu$ bestimmt. Somit erhalten wir die in F_n^I, L_n^I auf g senkrechten Normalgeraden $\mathfrak{f}^I$, $\mathfrak{l}^I$. Die relative Geschwindigkeit $L \mathfrak{L}_v$ des Systempunktes L ergibt sich auf $L L_v$ durch die zu $\mathfrak{P}' L_v$ Parallele $F \mathfrak{L}_v$; ferner wird seine relative Normalbeschleunigung $L \mathfrak{L}_n$ auf g bestimmt, indem wir auf $F \mathfrak{L}_v$ die Senkrechte $L_v \mathfrak{L}_\nu$ bis an g ziehen und $L \mathfrak{L}_n = L \mathfrak{L}_\nu$ machen. Diese Konstruktion wird aber nur zum Zweck der Ableitung ausgeführt und nachher nicht in Betracht kommen.

Um nun zu der auf einer Richtgeraden f^1 gegebenen Beschleunigung $F_j^{1\,I}$ die affin entsprechende Beschleunigung $L L_j^{1\,I}$ zu konstruieren, ziehen wir $\mathfrak{L}_n F_i \equiv F F_j^{1\,I}$ und durch F_i die auf FL senkrechte Gerade i_l, die aber in diesen betrachteten besonderen Fall mit der Normalgeraden $\mathfrak{l}^I$ zusammenliegt. Denn die Gerade i_l würde als Parallele neben der Normalgeraden $\mathfrak{l}^I$ diese im unendlich fernen Beschleunigungspunkt $L_j^{1\,I}$ schneiden. Gemäß

[1]) L. Burmester, Kinematik S. 113, Fig. 126.

der kinematischen Affinität entspricht aber dem Beschleunigungspunkt $F_j^{1\,I}$ ein im Endlichen liegender Beschleunigungspunkt $L_j^{1\,I}$; folglich ist dieser identisch mit dem Punkt F_i. Wegen der kongruenten Dreiecke $\mathfrak{Q}_n L_n^I L_j^{1\,I}$, $F F_n^I F_j^{1\,I}$ ist $\mathfrak{Q}_n L_n^I = F F_n^I$. Zu dem Beschleunigungspunkt $F_j^{1\,I}$ wird somit der entsprechenden $L_j^{1\,I}$ einfach durch die zu g Parallele $F_j^{1\,I} L_j^{1\,I}$ auf l^I bestimmt, und der Richtgeraden f^1 entspricht die Richtgerade l^1. Hierbei kommt der Punkt $\mathfrak{Q}_n$ gar nicht zur Verwendung und seine vorherige Konstruktion ist nicht nötig.

Nehmen wir auf der Richtgeraden f^1 einen zweiten Beschleunigungspunkt $F_j^{1\,II}$ an, dann wird durch die zu g Parallele $F_j^{1\,II} L_j^{1\,II}$ auf der Richtgeraden l^1 der entsprechende $L_j^{1\,II}$ bestimmt, und die durch $F_j^{1\,II}$, $L_j^{1\,II}$ gehenden auf g Senkrechten $\mathfrak{f}^{II}$, $\mathfrak{l}^{II}$ sind die zugehörigen Normalgeraden. Ferner ergeben sich durch diese Parallele auf $\mathfrak{f}^I$, $\mathfrak{l}^{II}$ die entsprechende Beschleunigungspunkte $F_j^{2\,I}$, $L_j^{2\,I}$ und die entsprechenden Richtgeraden f^2, l^2.

Die entsprechenden Richtgeraden der affinen Richtgeradenbüschel $F(f^1, f^2, ..)$ $L(l^1, l^2, ..)$ schneiden sich in den Punkten 1, 2 .., die wegen der zu g parallelen gleichen Strecken $F_j^{1\,I} L_j^{1\,I}$, $F_j^{2\,I} L_j^{2\,I}$ in einer auf g senkrechten Geraden h liegen, und beziehlich die selbstentsprechenden Punkte der auf den Richtgeradenpaaren $f^1 l^1$, $f^2 l^2$ .. liegenden ähnlichen Reihen entsprechender Beschleunigungspunkte sind. Demnach sind die sich auf diese Richtgeradenpaare beziehenden richtgeraden Beschleunigungszustandenscharen homothetisch ähnlich und die Punkte 1, 2 .., deren Beschleunigungspole.

Wegen der gleichen und parallelen Strecken $F_j^{1\,I} L_j^{2\,I}$, $F_j^{2\,I} L_j^{2\,I}$, .. sind die dadurch bestimmten Beschleunigungszustände der sich auf das Normalgeradenpaar $\mathfrak{f}^I \mathfrak{l}^I$ beziehenden normalgeraden Beschleunigungszustandenschar kongruent und parallel liegend, und das nämliche gilt sonach für alle normalgeraden Beschleunigungszustandenscharen, welche durch die Längen der Strecken $F_j^{1\,I} L_j^{1\,I}$, $F_j^{1\,II} L_j^{1\,II}$, .. bestimmt werden. Zu der ersten Beschleunigungszustandenschar gehört der durch die Strecke $F_v L_v$ bestimmte Geschwindigkeitszustand.

Die kinematische Affinität ist in affiner Lage, weil die Gerade h die Affinitätsachse ist und die entsprechenden Punkte in Parallelen zu der Geraden g liegen. Ferner zerfällt der von den affinen Richtgeradenbüscheln $F(f^1, f^2, ..)$, $L(l^1, l^2, ..)$ erzeugte Kegelschnitt in die Geraden g, h. In der Geraden h, die auf der Geraden g im Punkt $\mathfrak{W}'$ senkrecht ist, liegen zwei entsprechende Normalgeraden vereint; demnach wird der Punkt $\mathfrak{W}'$ auch durch $F\mathfrak{W}' = F\mathfrak{P}'^2/F\Phi$ und $L\mathfrak{W}' = L\mathfrak{P}'^2/L\wedge$ bestimmt. Für die Punkte des über $\mathfrak{P}'\mathfrak{W}'$ als Durchmesser beschriebenen Kreises $\mathfrak{w}'$ können Geschwindigkeit und Beschleunigung nicht in einer Geraden liegen, wie sich aus dem Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand ergibt; deshalb ist der Kreis $\mathfrak{w}'$ ein Pseudo-Wendekreis zu nennen. Die in der Durschschlagslage erscheinende Eigentümlichkeit ist darin begründet, daß es für den Pol $\mathfrak{P}'$ unendlich viele Polbahntangenten gibt. Um hierauf hinzuweisen sind in Fig. 12a nahe vor der Durchschlagslage zwei Lagen eines Kurbelgetriebes gezeichnet, bei dem beispielsweise die Koppel FL nicht innerhalb sondern außerhalb der Strecke $\Phi\wedge$ liegt. In den zweiten dieser beiden Lagen befinden sich der Pol $\mathfrak{P}''$ und der Schnittpunkt $\mathfrak{Q}''$ der Geraden FL, $\Phi\wedge$ nahe aneinander, und fallen erweislich in der Durchschlagslage zusammen. Da nur durch die Gerade $\mathfrak{P}''\mathfrak{Q}''$ die Pohlbahntangente bestimmt wird, so ergeben sich unendlich viele Polbahntangenten.

Alle diese Beziehungen bezüglich des Poles $\mathfrak{P}'$ gelten auch andererseits für den Pol $\mathfrak{P}''$; und eingezeichnet ist nur Pseudo-Wendekreis $\mathfrak{w}''$ mit dem Durchmesser $\mathfrak{P}''\mathfrak{W}''$.

d) In Fig. 13 liegt der Punkt $\wedge_\infty$ im Unendlichen und $\Phi F L \wedge_\infty$ ist ein exzentrisches Schubkurbelgetriebe, bei dem sich der Systempunkt L in einer auf $L\wedge_\infty$ senkrechten Geraden λ bewegt, die nicht durch Φ geht. Um die zu einer auf der Richtgeraden f gegebenen Beschleunigung FF_j die entsprechende LL_j auf der Richtgeraden λ zu bestimmen, verfahren wir nach der allgemeinen, strichpunktiert gekennzeichneten Konstruktion. Wir ziehen durch F_j die Normalgerade $\mathfrak{f}$, die ΦF in F_n trifft, dann $F_n N_f \parallel L\wedge_\infty$, $N_f \Psi_f \parallel \Phi L$, $\Psi_f \Psi_l \parallel FL$ und $\Psi_l \mathfrak{Q}_n \parallel \Phi F$, machen $\mathfrak{Q}_n F_i = FF_j$ und ziehen durch F_i die auf FL senkrechte Gerade i_l, die λ in L_j trifft. In anderer Weise ergibt

sich auf der durch F_j gehenden zu λ Parallele $F\zeta = L_j L$, indem wir die zu $L \wedge_\infty$ Parallele $\Psi_f \mathfrak{F}_n$ bis an FL und $\mathfrak{F}_n\zeta$ senkrecht FL ziehen. Denn es ist $\mathfrak{F}_n F = L \mathfrak{L}_n$, ferner $F F_j = \mathfrak{L}_n F_i$ und $\mathfrak{F}_n\zeta$ parallel $F_i L_j$. Sonach folgen die analogen Beziehungen wie in b), obschon dort und hier die Bewegungsvorgänge wesentlich verschieden sind.

Allen Richtgeraden für F entspricht die Gerade λ als einzige Richtgerade für L, und allen auf ΦF senkrechten Normalgeraden entspricht λ auch als einzige auf $L \wedge_\infty$ senkrechte Normalgerade. Demnach entartet die kinematische Affinität der Systeme $\mathfrak{S}^F$, $\mathfrak{S}^L$, so daß das System $\mathfrak{S}^L$ in der Geraden λ zusammenschrumpft, wobei gemäß der Konstruktion des Beschleunigungspunktes L_j jeder in einer auf ΦF senkrechten Normalgeraden liegenden Reihe von Beschleunigungspunkten eine ähnliche Reihe in der Geraden λ entspricht, und das nämliche gilt auch für jede Reihe, die in einer von F ausgehenden Richtgeraden liegt.

Der Beschleunigungspunkt $\mathfrak{P}_j$ des Poles $\mathfrak{P}$ ergibt sich durch das zu $FL\mathfrak{P}$ ähnliche Dreieck $F_j L_j \mathfrak{P}_j$, und ist der selbstentsprechende Punkt der sich auf die Normalgeraden $\mathfrak{f}, \lambda$ beziehende normalgeraden Beschleunigungszuständenschar.

Behufs der Konstruktion des Wendekreises $\mathfrak{w}$ ziehen wir die zu $L \wedge_\infty$ Parallele $\Phi\Omega$ oder auf λ Senkrechte bis an LF, machen den Winkel $L\mathfrak{P}\mathrm{t} = \Omega\mathfrak{P}F$, und ziehen den auf der Polbahntangente t senkrechten Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ des Wendekreises bis an λ, der ΦF in dem Punkt $F_n^{\mathfrak{w}}$ schneidet. Indem wir die zu der Richtgeraden f Parallele $\mathfrak{W}K$ bis am Wendekreis und die Gerade KF bis an ihn ziehen, erhalten wir den Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$. Durch den Winkel $F_j \mathfrak{J} L_j = F\mathfrak{J}L$ wird dann auf λ auch L_j bestimmt. Ferner ergibt sich nun der Punkt $\mathfrak{P}_j$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ durch den Winkel $F_j \mathfrak{J} \mathfrak{P}_j = F\mathfrak{J}\mathfrak{P}$ und auch durch die Proportion $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j : \mathfrak{P}\mathfrak{W} = FF_n : FF_n^{\mathfrak{w}}$.

Wenn der Pol $\mathfrak{P}$ ins Unendliche gelangt, also ΦF und $\wedge_\infty L$ parallel sind, so kann zu einer Beschleunigung des Systempunktes F die entsprechenden des Systempunktes L wie bei a), Fig. 10, falls dort der Punkt $\wedge$ im Unendlichen liegt, konstruiert werden. Wenn ferner das Schubkurbelgetriebe in eine Totlage gelangt, wird ebenso wie bei b), Fig. 11, verfahren.

e) In Abb. 14 liegt der Punkt L_∞ im Unendlichen, und $\Phi F L_\infty \wedge$ ist ein exzentrisches Schleifkurbelgetriebe, bei dem die nicht durch $\wedge$ gehende Gerade l' in einer Hülse an der Kurve λ' gleitet, deren Krümmittelpunkt $\wedge$ ist. In diesem besonderen Fall ersetzen wir die augenblickliche Bewegung der Schleifkurbelgetriebe durch ein Kurbelgetriebe. Der Einfachheit halber nehmen wir auf der Geraden l' den Systempunkt D an, der in dem Berührpunkt der Geraden l' an der Kurve λ' liegt, und sich auf der Bahnkurve δ bewegt. Um den Krümmittelpunkt Δ dieser Bahnkurve zu bestimmen, verfahren wir nach der in Fig. 9a ausgeführten Konstruktion. Wir ziehen zu $\wedge L_\infty$ die Parallele ΦII, welche die Gerade l' senkrecht im Punkt II trifft, ferner die Gerade $\mathfrak{P}II$, welche die Gerade $\Phi\wedge$ im Punkt I schneidet, und die Gerade $1F$, durch die sich auf $\mathfrak{P}D$ der Krümmittelpunkt Δ ergibt. Zu der gegebenen Beschleunigung FF_j wird dann in der bekannten Weise nach der allgemeinen Konstruktion β, die entsprechende Beschleunigung DD_j bestimmt. Die zugehörige richtgerade und normalgerade Beschleunigungszuständenschar ergeben sich in der bekannten Weise. Durch die Normalbeschleunigung FF_n ergibt sich die Geschwindigkeit FF_c und durch diese wird der zugehörige Geschwindigkeitszustand bestimmt.

Um den Wendekreis $\mathfrak{w}$ zu konstruieren, machen wir den Winkel $F\mathfrak{P}\mathrm{t} = \Omega\mathfrak{P}D$, ziehen in $\mathfrak{P}$ die auf der Polbahntangente t Senkrechte, in welcher der Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ des Wendekreises liegt; ferner machen wir auf ΦF die Strecke $FF_n^{\mathfrak{w}} = \overline{F\mathfrak{P}}^2 / \Phi F$ und ziehen die auf ΦF Senkrechte $F_n^{\mathfrak{w}}\mathfrak{W}$, wodurch sich der Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ des Wendekreises $\mathfrak{W}$ ergibt. Wenn der Punkt Ω nicht zugänglich ist, dann wird noch auf $\mathfrak{P}D$ die Strecke $DD_n^{\mathfrak{w}} = \overline{F\mathfrak{P}}^2 / \Phi F$ gemacht und auf $\mathfrak{P}D$ die Senkrechte $D_n^{\mathfrak{w}}\mathfrak{P}$ gezogen. Indem wir die zu f Parallele $\mathfrak{W}K$ und die Gerade KF ziehen, erhalten wir den Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$. Durch das zu $\mathfrak{J}FD$ ähnliche Dreieck $\mathfrak{J}F_jD_j$ wird dann auch der Beschleunigungspunkt D_j und durch den Winkel $\mathfrak{P}\mathfrak{J}\mathfrak{P}_j = D\mathfrak{J}D_j$ der Beschleunigungspunkt $\mathfrak{P}_j$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ bestimmt.

f) In Fig. 15 befinden sich die beiden Systempunkte F_∞, L_∞ im Unendlichen. In diesem besonderen Fall nehmen wir an, daß die Schenkel f', l' eines starren Winkels, die durch Hülsen gehen und an gedachten festen Kurven gleiten, durch ihre Krümmkreise

q', λ' ersetzt werden, deren Mittelpunkte $\Phi, \wedge$ sind. Dann können wir eine augenblickliche Gleitung an diesen Kurven als eine augenblickliche von der beständigen Gleitung der Schenkel f', l' an den Krümmkreisen q', λ' betrachten.

Durch die Mittelpunkte $\Phi, \wedge$ ziehen wir die beiden beziehlich zu f', l' parallelen Geraden f^I, l^I, die sich im Punkt C schneiden. Diese bilden als Systemgerade einen starren Winkel $f^I C l^I$ und gleiten an den Mittelpunkten $\Phi, \wedge$. Der Systempunkt C bewegt sich demnach auf dem über $C\mathfrak{P}$ als Durchmesser beschriebenen und durch die Punkte $\Phi, \wedge$ gehenden Kreis γ, dessen Mittelpunkt mit Γ bezeichnet ist. Während der Bewegung rollt der um C mit Radius $C\mathfrak{P}$ beschriebene Systemkreis p umschließend an dem Kreis γ, und die Bahnkurven der auf p liegenden Systempunkte sind Kardioiden; deshalb wird diese Bewegung eine kardioidische Bewegung genannt.

Der Kreis γ, der die auf $\mathfrak{P}F$ senkrechte Polbahntangente $\mathfrak{t}$ berührt, heißt Rückkehrkreis, und auf ihm liegen die Spitzen der Kardioiden. Der Wendekreis $\mathfrak{w}$ ist gleich dem Rückkehrkreis und berührt andererseits die Polbahntangente in $\mathfrak{P}$. Da der Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ des Wendekreises gleich $C\mathfrak{P}$ ist, und der Wendekreis demnach auch ohne den Rückkehrkreis sehr einfach bestimmt wird, so kann vermittelst des Beschleunigungspoles $\mathfrak{I}$ zu einer gegebenen Beschleunigung CC_j der Systempunkt C die entsprechende Beschleunigung DD_j eines beliebigen anderen Systempunktes D zweckmäßig konstruiert werden. Wir ziehen die zu CC_j Parallele $\mathfrak{W}K$ bis an den Wendekreis und die Gerade KC, die ihn in $\mathfrak{I}$ trifft, und zeichnen zu dem Dreieck $\mathfrak{I}CC_j$ das ähnliche Dreieck $\mathfrak{I}DD_j$. Das gilt auch umgekehrt. Der Beschleunigungspunkt $\mathfrak{P}_j$ wird auf $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ durch den Winkel $\mathfrak{I}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j = \mathfrak{I}CC_j$ bestimmt. Den Geschwindigkeitszustand erhalten wir durch die Normalbeschleunigung CC_n und die entsprechende Geschwindigkeit des Systempunktes C.

Da $C\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{t}$ senkrecht ist, so ergibt sich, indem wir die auf $\mathfrak{P}D$ Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ bis an die Gerade CD und die Gerade $\mathfrak{Q}\Gamma$ ziehen, welche die Gerade $\mathfrak{P}D$ im Punkt Δ trifft, das Kurbelgetriebe $\Gamma CD\Delta$, das dieselbe augenblickliche Bewegung bewirkt, wie die des bewegten starren ebenen Systems durch die Gleitung des starren Winkels an jenen Kurven, deren Krümmittelpunkte $\Phi, \wedge$ sind.

g) In Fig. 16 liegen die Punkte $\Phi_\infty, \wedge_\infty$ im Unendlichen. In diesem besonderen Fall nehmen wir an, daß gedachte Systemkurven, die beziehlich an den auf $F\Phi_\infty, L\wedge_\infty$ senkrechten Geraden q', λ' gleiten, und durch ihre Krümmkreise f', l' ersetzt werden, deren Mittelpunkte F, L sind; dann können wir eine augenblickliche Gleitung dieser Systemkurven als eine augenblickliche von der beständigen Gleitung der Krümmkreise an den Geraden q', λ' betrachten.

Durch die Mittelpunkte F, L ziehen wir die beziehlich zu q', λ' parallele Gerade q^I, λ^I, die sich im Punkt Γ schneiden, und die Systempunkte F, L bewegen sich beziehlich auf q^I, λ^I. Der über $\Gamma\mathfrak{P}$ als Durchmesser beschriebene, durch F, L gehende Kreis ist dann der Wendekreis $\mathfrak{w}$ und nun Γ der Wendepol. Der Mittelpunkt C des Wendekreises bewegt sich auf dem um Γ mit dem Radius ΓC beschriebenen Kreis γ. Während der Bewegung rollt der Wendekreis $\mathfrak{w}$ im Innern an dem um Γ mit dem Radius $\Gamma\mathfrak{P}$ beschriebenen Kreis π. Die Systempunkte des Wendekreises bewegen sich im Durchmesser des Kreises π und die Bahnkurven aller anderen Systempunkte sind Ellipsen, deshalb wird diese Bewegung eine elliptische Bewegung genannt, und sie ist die Umkehrung von der kardioischen Bewegung. Der Wendekreis $\mathfrak{w}$ berührt die Polbahntangente $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{P}$ und der gleiche Rückkreis $\mathfrak{r}$ liegt zu ihm bezüglich t symmetrisch.

Um zu der gegebenen Beschleunigung CC_j des Systempunktes C die entsprechenden in den Geraden q^I, λ^I liegenden Beschleunigungen FF_t, LL_j der Systempunkte F, L vermittelst des Beschleunigungspoles $\mathfrak{I}$ zu konstruieren, ziehen wir durch den Wendepol Γ die zu CC_j Parallele ΓK bis an den Wendekreis $\mathfrak{w}$ und die Gerade KC, die ihn in $\mathfrak{I}$ trifft; sodann machen wir die Winkel $F\mathfrak{I}F_j, L\mathfrak{I}L_j$ gleich dem Winkel $C\mathfrak{I}C_j$. Ferner wird der in ΓC liegende Beschleunigungspunkt $\mathfrak{P}_j$ durch den Winkel $\mathfrak{P}\mathfrak{I}\mathfrak{P}_j = C\mathfrak{I}C_j$ bestimmt. Zu einem beliebigen Systempunkt D ergibt sich der Beschleunigungspunkt D_t, indem wir zu dem Dreieck $\mathfrak{I}CC_j$ das ähnliche Dreieck $\mathfrak{I}DD_j$ konstruieren. Der Geschwindigkeitszustand wird durch die Normalbeschleunigung CC_n und die ihr entsprechende Geschwindigkeit des Systempunktes C ermittelt.

Um die augenblickliche Bewegung durch ein Kurbelgetriebe zu ersetzen, ziehen wir durch den schon beliebig angenommenen Systempunkt D die Gerade $D\mathfrak{P}$ und die auf ihr Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ bis an DC, ferner die Gerade $\Gamma\mathfrak{Q}$, die $D\mathfrak{P}$ im Punkt Δ trifft.

So erhalten wir das Kurbelgetriebe $\Gamma C D \Delta$, das dieselbe augenblickliche Bewegung bewirkt wie die Gleitung jener Kurven an den Geraden φ', λ'.

In diesem besonderen Fall ist schließlich noch zu einer in der Geraden φ^I liegenden, gegebenen Beschleunigung $F F_j$ die entsprechende $L L_j$ in der Geraden λ^I direkt zu konstruieren; dann ist aber auch die Geschwindigkeit des Systempunktes F erforderlich. Wir wählen der Uebereinstimmung halber mit den gezeichneten Beschleunigungen die gedrehte Geschwindigkeit $F F_v$ des Systempunktes F, die der vorherigen Bewegung entspricht. Nach der S. 504 organisch abgeleiteten Konstruktion verfahren wir wie strichzweipunktig gekennzeichnet ist.

Wir ziehen zu $L \wedge_\infty$ die Parallele $F_v \mathfrak{F}_v$ bis an $F L$, dann ist die Strecke $F \mathfrak{F}_v$ gleich der relativen Geschwindigkeit des Systempunktes L; und seine auf $F L$ liegende Normalbeschleunigung $L \mathfrak{L}_n$ wird bestimmt, indem wir die auf $F L$ Senkrechte $L \mathfrak{L}_v = F \mathfrak{F}_v$ machen; ferner ziehen wir die auf $F \mathfrak{L}_v$ Senkrechte $\mathfrak{L}_v \mathfrak{L}_v$ bis an $F L$ und legen Strecke $\mathfrak{L}_v L$ nach $L \mathfrak{L}_n$, sodann machen wir $\mathfrak{L}_n F_i = F F_i$ und ziehen durch F_i die auf $F L$ Senkrechte, die λ^I in dem Punkt L_j trifft. Hiernach entspricht bei dieser Konstruktion jedem in der Geraden φ^I liegenden Zwillingspaar von beliebig gegebener Beschleunigung und Geschwindigkeit des Systempunktes F ein solches Zwillingspaar in der Geraden λ^I für den Systempunkt L in der kinematischen Affinität. 587

KLEINE MITTEILUNGEN

Bemerkungen zum ebenen Spannungszustand. 1. Anschauliche Deutung der Airyschen Spannungsfunktion. Wir setzen einen ebenen Spannungszustand voraus, bei dem keine Massenkräfte vorhanden sind. Wählen wir nun im Körper ein für allemal einen festen Punkt O (Abb. 1), so ist die Resultierende $\mathfrak{R}$ aller inneren Kräfte, genommen über eine beliebige Kurve I, die zwischen O und A gezogen ist (Höhe der Schnittfläche senkrecht zur Bildebene gleich eins gedacht), nur abhängig von der Lage des Punktes A, nicht aber von der Form der Kurve I. Man sieht dies ohne weiteres ein, wenn man sich eine andere Kurve II, die ebenfalls O mit A verbindet eingezeichnet denkt und berücksichtigt, daß der so herausgeschnittene Teil des Körpers im Gleichgewicht sein muß. Das Gleiche gilt von dem um den Punkt A genommenen Moment M_A der inneren Kräfte.

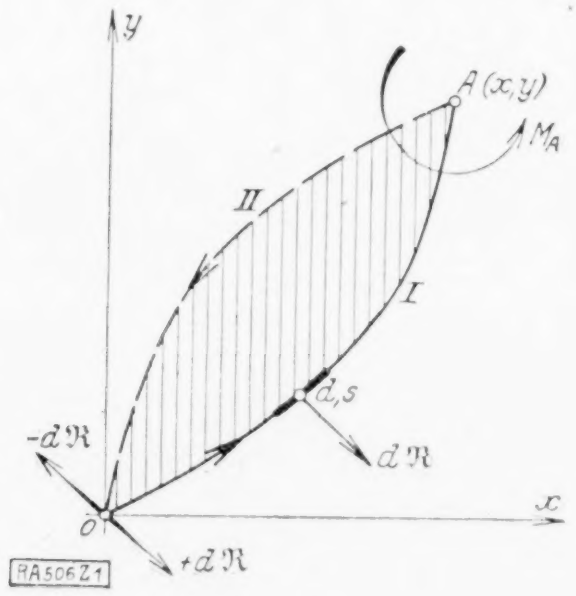


Abb. 1.

Die Komponenten X und Y der Resultierenden der inneren Kräfte längs OA ergeben sich, mit der üblichen Bezeichnung der Zug- und Schubspannungen, zu

$$\left.\begin{aligned} X &= \int_0^A \sigma_x \, d\beta - \tau \, d\alpha \\ Y &= \int_0^A \tau \, d\beta - \sigma_y \, d\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1).$$

Wir wollen dabei mit α und β die Koordinaten irgend eines Punktes der Kurve OA bezeichnen, während der Endpunkt A selbst die Koordinaten x und y haben soll.

Um M_A möglichst einfach zu berechnen, fügen wir in O die Hilfskräfte $+ d\mathfrak{R}$ und $- d\mathfrak{R}$ hinzu. Das Moment M_A ist dann gleich dem resultierenden Moment M_O der inneren Kräfte um den Punkt O, vermehrt um das um den Punkt A genommene Moment der nach O verschobenen Resultierenden $\mathfrak{R}$:

$$M_A = y X - x Y + \int_0^A (\alpha \, dY - \beta \cdot dX) \quad (2).$$

Ebenso einfach als bei gegebenem Spannungszustand für jeden Punkt $A(x, y)$ mit Hilfe der Gleichung (2) das resultierende Moment M_A der inneren Kräfte $d\mathfrak{R}$ gefunden werden kann, lassen sich umgekehrt die Spannungen σ_x, σ_y und τ bestimmen, wenn M_A für alle Punkte A des Körpers bekannt ist.

Zu diesem Zweck brauchen wir bloß die partiellen Differentialquotienten von M_A zu bestimmen, wobei wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M_A}{\partial x} &= \left(y \frac{\partial X}{\partial x} - x \frac{\partial Y}{\partial x} - Y\right) + \left(x \frac{\partial Y}{\partial x} - y \frac{\partial X}{\partial x}\right) \\ &= -Y \\ \frac{\partial M_A}{\partial y} &= +X \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und

$$\frac{\partial^2 M_A}{\partial x^2} = +\sigma y, \quad \frac{\partial^2 M_A}{\partial x \partial y} = -\tau, \quad \frac{\partial^2 M_A}{\partial y^2} = +\sigma x \qquad (4).$$

Gleichungen (4) stimmen nun vollständig mit den bekannten Gleichungen überein, aus denen die Spannungen σ_x, σ_y und τ bei gegebener Airyschen Spannungsfunktion gefunden werden. Wir erhalten also:

Der Wert der Airyschen Spannungsfunktion für irgend einen Punkt A ist gleich dem resultierenden Moment M_A der inneren Kräfte $d\mathfrak{R}$ genommen über eine beliebig gezogene Kurve OA. Selbstverständlich kann noch irgend eine beliebige lineare Funktion $ax + by + c$ hinzugefügt werden, ohne die Spannungskomponenten zu verändern[1]).

Aus Gleichung (3) ist endlich noch ersichtlich, daß man den Gradienten von M_A dadurch erhält, daß man $\mathfrak{R}$ um $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinne dreht. Die bekannten, von Michell[2]) gegebenen Ausdrücke für die Randwerte der Spannungsfunktion und ihres partiellen Differentialquotienten nach der Richtung der Normalen, lassen sich aus obigen Formeln durch einfache Umformungen gewinnen.

2. Spannungstrajektorien als Linien konstanten Druckes. Es soll jener ebene, massenkraftfreie Spannungszustand untersucht werden, bei dem jede Trajektorie der einen von beiden Spannungstrajektorienscharen gleichzeitig eine Linie konstanten Druckes ist. Denken wir insbesondere an den Fall eines zweifach zusammenhängenden Körpers, so haben wir ein Rohr bzw. Blech vor uns,

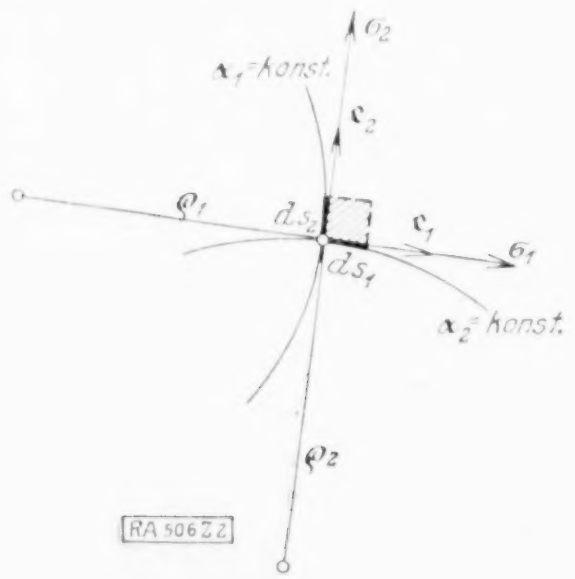


Abb. 2.

[1]) Wie mich Herr Professer K. Wolf (Wien) nachträglich aufmerksam macht, findet sich eine ähnliche Einführung der Spannungsfunktion bei P. Funk. Sitzber. d. Akad. d. Wiss. Wien, Math.-nat. Kl, IIa, 127. Band (1918) Heft 6, doch fehlt dort die einfache Deutung als resultierendes Moment der Spannungskräfte um den Endpunkt der willkürlich gezogenen Kurve.

[2]) Proc. London M. Soc. 31 (1899), zitiert nach Timpe, Ztschrft. f. Math. u. Phys. 52 (1905).

das unter verschiedenen, konstanten (hydrostatischen) Außen- und Innendrücken steht und welches die Eigenschaft besitzt, daß es durch einen Schnitt längs einer beliebigen dieser Trajektorien wieder in 2 Rohre bzw. Bleche mit konstanten Außen- und Innendrücken zerfällt.

Wir können leicht die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der fraglichen Kurvenschar auffinden, wenn wir krummlinige, rechtwinklige Koordinaten benutzen, deren Linien $\alpha_1 =$ konst. und $\alpha_2 =$ konst. mit den Spannungstrajektorien zusammenfallen. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ die Einheitsvektoren die senkrecht auf die Linie $\alpha_1 =$ konst. bzw. $\alpha_2 =$ konst. stehen, ferner mit ρ_1 und ρ_2 die entsprechenden Krümmungsradien und führen schließlich ein:

$$|\nabla \alpha_1| = h_1, \quad |\nabla \alpha_2| = h_2 \quad . \quad . \quad (1),$$

so erhalten wir:

$$d s_1 = \frac{d \alpha_1}{h_1}, \quad d s_2 = \frac{d \alpha_2}{h_2} \quad . \quad . \quad (2)$$

und:

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial \alpha_1} = -\mathfrak{e}_2 h_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{h_1}\right) = -\mathfrak{e}_2 \frac{1}{\varrho_2 h_1} \qquad (3).[1])$$

Die Gleichgewichtsbedingung für ein Massenteilchen schreibt sich in folgender Form, wobei wir immer die Kräfte, die auf zwei gegenüberliegende Flächenelemente wirken, zusammenfassen wollen:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\mathfrak{e}_1 \sigma_1 d s_2)\, d\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\mathfrak{e}_2 \sigma_2 d s_1)\, d\alpha_2 = 0 \qquad (4).$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2) und (3) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{\sigma_1}{h_2}\right) - \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{h_2}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{\sigma_2}{h_1}\right) - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{h_1}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5).[2])$$

Sollen nun die Spannungstrajektorien $\alpha_1 =$ konst. auch Linien konstanten Druckes sein, so muß gelten:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha_2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Aus der oberen der beiden Gleichungen (5) ergibt sich σ_2 zu:

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \frac{d \sigma_1}{d \alpha_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{h_2}\right)}{\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{h_1}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wobei zu berücksichtigen ist, daß nunmehr statt $\frac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha_1}$ der totale Differentialquotient $\frac{d \sigma_1}{d \alpha_1}$ zu schreiben ist. In die untere Gleichung eingesetzt, gibt dies unter Berücksichtigung von Gleichung (3)

$$\frac{d \sigma_1}{d \alpha_1} \cdot \frac{\partial \varrho_1}{\partial \alpha_2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

[1]) Siehe F. Jung: Sitzber. d. A. d. W. in Wien, Math-nat. Cl. Abt. IIa, CXVII (1908), S. 1005. — F. Emde, Ausz. aus Maxwells El. u. Magn., S. 175 (1915).

[2]) Vergl. Love (Timpe), Lehrb. d. El., S. 107.

Dieses Produkt kann nur verschwinden, wenn einer der beiden Faktoren Null wird.

Ist $\frac{d\sigma_1}{d\alpha_1} = 0$, so folgt aus Gleichung (6) und (7): $\sigma_1 = \sigma_2 = \text{konst.}$

Das ist der triviale Fall einer allseitig gleichförmigen Druckverteilung.

Die zweite Möglichkeit ist die, daß $\frac{\partial \varrho_1}{\partial \alpha_2} = 0$ ist. Dann sind die Krümmungsradien nur Funktionen von α_1 allein, d. h. die Spannungstrajektorien längs welcher der Druck konstant ist, sind K r e i s e.

Ein solcher Spannungszustand ist offenbar bei einem gewöhnlichen Rohr bzw. Blech, dessen Querschnitt durch einen k o n z e n t r i s c h e n K r e i s r i n g gebildet wird und welches unter konstanten Innen- und Außendrücken steht, realisiert. Daß es einen anderen hierher gehörigen Spannungszustand nicht gibt, ist aus folgendem zu ersehen: Die Spannungstrajektorien wären dann nämlich e x e n t r i s c h e Kreise, die noch irgendwie liegen könnten, jedenfalls hätten wir im Ganzen ein e x z e n t r i s c h gebohrtes Kreisrohr (bzw. Blech) vor uns. Für ein solches ist aber die Spannungsverteilung bekannt[1]). Eine einfache Rechnung ergibt, daß hier, bei Vorspannungsfreiheit des Körpers, die Spannungstrajektorien mit Ausnahme der Ränder selbst, keine Kreise und daher auch nicht Linien konstanter Hauptspannung sind.

Damit ist die gestellte Aufgabe dahingehend erledigt, daß der k o n z e n t r i s c h e K r e i s r i n g unter konstanten Außen- und Innendrücken den e i n z i g e n Fall darstellt, bei welchem die Spannungstrajektorien zugleich Linien konstanten Druckes sind.

Wien. W i l h e l m G a u s t e r. 506

Eine neue Näherungsformel für die Schwingungsdauer des Pendels. In der im Februar 1925 erschienenen Nummer der finnischen Zeitschrift »Teknillinen Aikakanslehti« habe ich eine Untersuchung veröffentlicht, in der eine einfache und sehr genaue Formel für die Schwingungsdauer des einfachen Pendels abgeleitet ist. Ich will hier die Formel und ihre Ableitung kurz wiedergeben.

Zum Ausgangspunkt nehmen wir die bekannte Formel für die Dauer einer vollständigen Schwingung

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha/2 \sin^2 \psi}}\, d\psi,$$

wo α den Schwingungswinkel (den Winkel zwischen der lotrechten und einer Grenzlage) bedeutet.

Die Idee der Ableitung ist, daß die Funktion

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha/2 \sin^2 \psi}}$$

durch eine lineare Funktion, d. h. die entsprechende Kurve durch eine Gerade ersetzt wird, die die Endpunkte des dem Integrationsintervall entsprechenden Bogens verbindet. Daß man hierdurch eine gute Annäherung erwarten kann, ersieht man, wenn man den Differentialquotienten

$$y' = \frac{\sin^2 \alpha/2 \sin 2\psi}{2\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha/2 \sin^2 \psi)^3}}$$

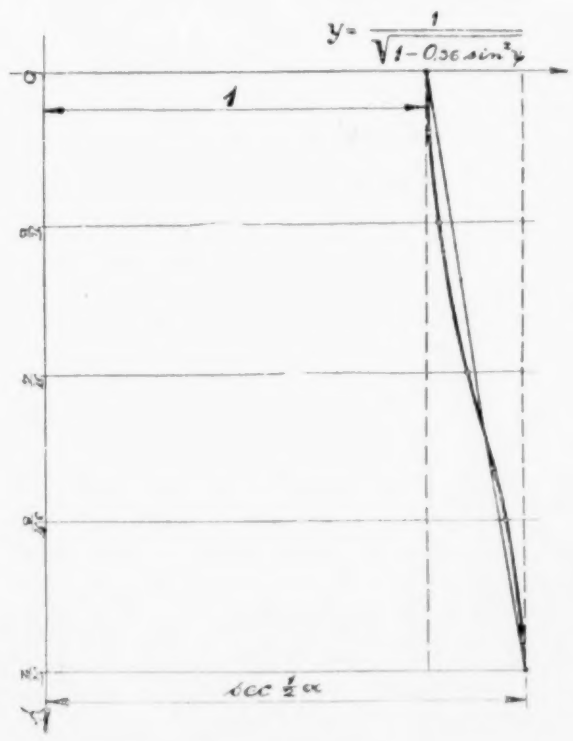
betrachtet. Dieser Differentialquotient ist in jedem Punkte des Integrationsintervalles $0 \to \frac{\pi}{2}$ positiv. Die Kurve ist also immer eine steigende, wie man schon an dem Ausdrucke der Funktion y selbst ersehen kann. Für $\psi = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ wird y' Null, d. h. die Tangenten an den Endpunkten des Bogens laufen der Abscissenachse parallel. Der Bogen muß also ihre Sehne schneiden und ähnlich der beigefügten Figur laufen. Wenn man jetzt die von dem Integrale $\int_0^{\pi/2} y\, d\psi$ bestimmte Fläche durch das entsprechende Trapez ersetzt, dessen parallele Seiten 1 und $\frac{1}{\cos \alpha/2} = \sec \alpha/2$ sind und dessen Höhe $\frac{\pi}{2}$ ist, so erhält man näherungsweise

$$\int_0^{\pi/2} y\, d\psi = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{\cos \alpha/2}\right) = \frac{\pi}{4}(1 + \sec \alpha/2)$$

und

$$\left.\begin{aligned} T &= \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{\cos \alpha/2}\right) \\ \text{oder} \quad T &= \pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \sec \alpha/2) \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

was unsere Näherungsformel ist.



[1]) Vergl.: C. W e b e r, diese Zeitschrift, 1922, Heft 4, S. 267.

Diese Formel ist viel genauer als die in der Regel gebrauchte Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,(1 + {}^1/_4 \sin^2 \alpha/2)$$

und gibt noch für $\alpha = 45^0$ so gute Werte, daß der Fehler nur 1,2 vT ist.

Wenn man den Faktor $1 + \dfrac{1}{\cos \alpha/2} = 1 + (1 - \sin^2 \alpha/2)^{-1/2}$ nach den Potenzen von $\sin^2 \alpha/2$ entwickelt, erhält man die Reihenentwicklung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 \alpha/2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\sin^4 \alpha/2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\sin^6 \alpha/2 + \ldots\right\} \quad (2).$$

Wie bekannt lautet die exakte Reihenentwicklung für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \alpha/2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4 \alpha/2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6 \alpha/2 + \ldots\right\}$$

und hierdurch wird die Genauigkeit unserer Formel näher erklärt. Man sieht auch, daß unsere Näherungsformel immer etwas zu große Werte gibt (für $\alpha = \pi$ wird T nach dieser Formel gleich dem Wert der exakten Formel).

Wünscht man noch größere Genauigkeit als unsere Formel gibt, so kann man aus den Werten unserer Formel und der gewöhnlich gebrauchten Formel $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\,(1 + \dfrac{1}{4}\sin^2 \alpha/2)$ einen Mittelwert bilden, wobei man dem Werte unserer Formel das Gewicht 3 und dem Werte der anderen Formel das Gewicht 1 beilegt. Der so erhaltene Wert ist immer noch etwas zu groß, wie man an der Reihenentwicklung ersehen kann, aber so genau, daß der Fehler für $\alpha = 45^0$ kleiner als 0,05 vT ist. 518

Tammerfors (Finnland). K. A. Poukka.

Axonometrie in graphischer Darstellung. Projiziert man (Abb. 1) ein Achsenkreuz OX, OY, OZ auf die Bildebene B, so erhält man die für die axonometrische Darstellung maßgebenden Achsen, welche die Winkel α, β und γ miteinander einschließen. Trägt man von O aus die Einheit auf ($OA = 1$ usf.) und projiziert auch die Punkte A, B und C auf die Bildebene, so ist durch $\dfrac{O_1 A_1}{O A} = a$ das Verkürzungsverhältnis in Richtung der X-Achse bestimmt.

Die Beziehungen zwischen den Achsen und den Winkeln ergeben sich aus den Sätzen von Weisbach oder Gauß. v. Dalwigk (Vorlesungen über Darstellende Geometrie) entwickelt dafür die Formeln

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 + c^2)\,(a^2 + b^2 - c^2)}}{2\,b\,c} \text{ usf.}$$

Einfachere Gleichungen erhält man aus Abb. 1.

Es ist $NP = ON \sin p$, $OP = ON \cdot \cos p$ und $O_1 P = ON \cdot \cos p \cdot \sin q$. Daraus

$$\operatorname{tg} n = \frac{\cos p \cdot \sin q}{\sin p}.$$

Ebenso erhält man

$$\operatorname{tg} m = \frac{\sin p \cdot \sin q}{\cos p} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} m \cdot \operatorname{tg} n = \sin^2 q.$$

Nun ist

$$c = O_1 C_1 = OC \cdot \cos q = \sqrt{1 - \sin^2 q} = \sqrt{1 - \operatorname{tg} m \cdot \operatorname{tg} n}.$$

Ersetzt man die Winkel m und n durch α, β und γ, so findet man die drei Gleichungen

$$a = \sqrt{1 - \operatorname{cotg}\beta \cdot \operatorname{cotg}\gamma} \quad . \quad . \quad (1),$$

$$b = \sqrt{1 - \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\gamma} \quad . \quad . \quad (2),$$

$$c = \sqrt{1 - \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\beta} \quad . \quad . \quad (3).$$

In Abb. 2 ist die Gl. (3) mit Hilfe räumlicher Koordinaten dargestellt. Die aus Abb. 2 ersichtliche Fläche sei als »c«-Fläche bezeichnet. In gleicher Weise kann man eine »a«-Fläche und eine »b«-Fläche zeichnen.

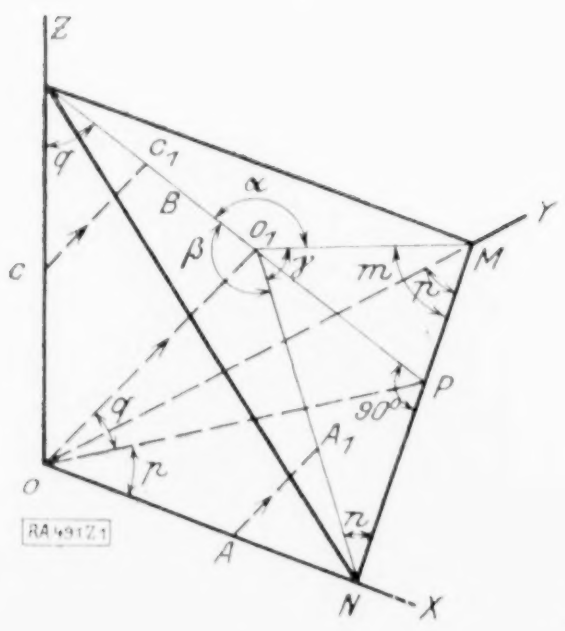


Abb. 1.

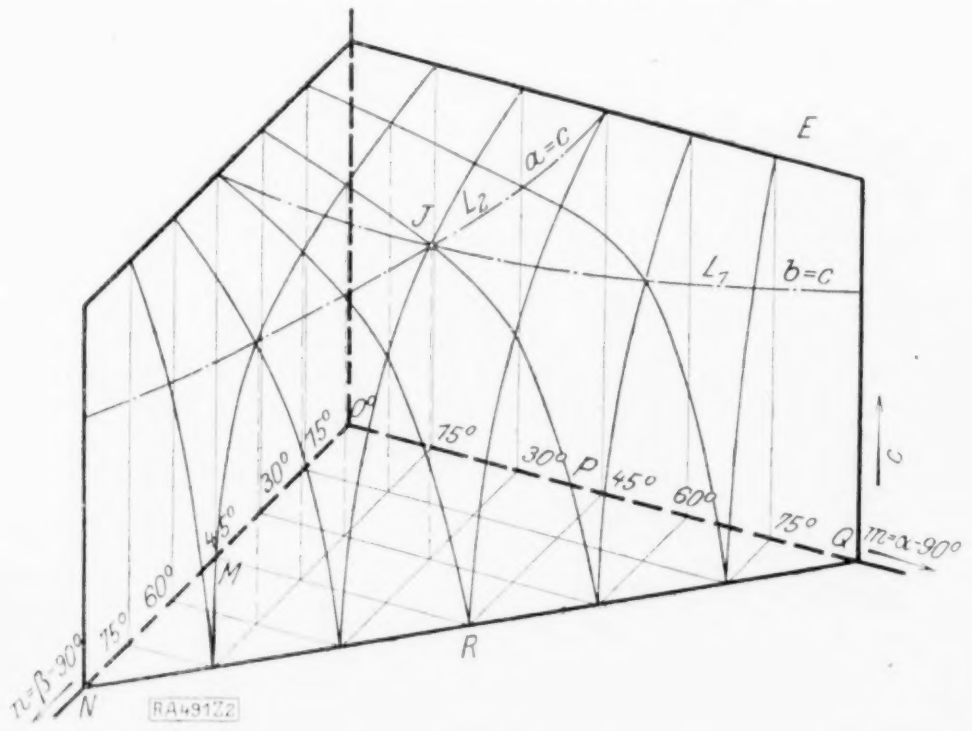


Abb. 2.

Bringt man die »c«-Fläche mit der »b«-Fläche zum Schnitt, so erhält man eine Schnittlinie L_1, welche die Gleichung $b = c$ erfüllt (Dimetrische Projektion). Aus $b = c$ folgt $\measuredangle \beta = \measuredangle \gamma$, d. h. der Grundriß von L_1 ist eine Gerade MQ, für welche $\alpha = 360 - 2\beta$ oder

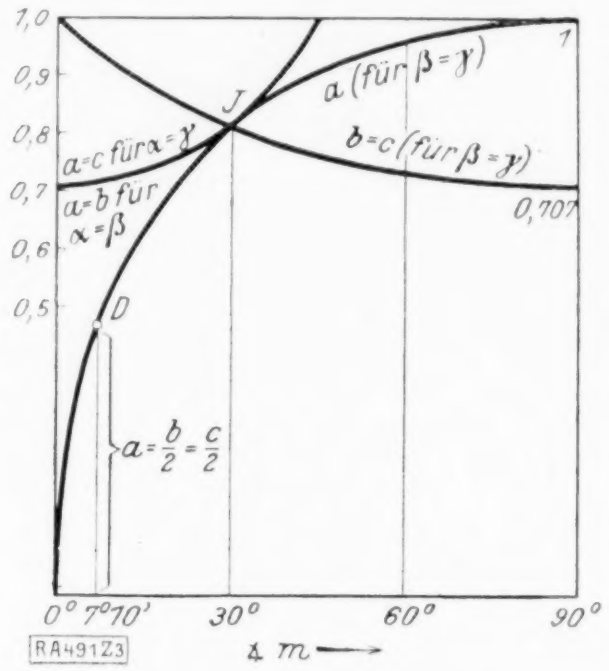


Abb. 3.

$m = 90 - 2n$ ist. Mit anderen Worten: Bei einem Würfel in dimetrischer Projektion wird der Winkel zwischen den beiden gleich langen Kanten durch die 3. Kante halbiert.

Bringt man die »a«-Fläche mit der »c«-Fläche zum Schnitt, so erhält man die Schnittlinie L_2 (Grundriß NP). Endlich folgt eine dritte Reihe dimetrischer Darstellungen aus $a = b$. Die Schnittlinie zwischen der »a«- und »b«-Fläche hat die Gerade OR zum Grundriß. Die Ordinate über R ist $= 1$, über $0 = 0{,}707$.

Die 3 Schnittlinien haben einen Punkt J gemeinsam, für den $a = b = c$ ist und zu dem die Winkel $\alpha = \beta = \gamma = 120^0$ gehören (Isometrischer Fall der senkrechten Axonometrie). Projiziert man die drei Schnittlinien auf die Ebene E, so erhält man Abb. 3, die auch für den Sonderfall $b = c$ die zugehörigen Werte von a zeigt.

Diese Kurve für a stellt räumlich betrachtet die Schnittlinie dar zwischen der »a«-Fläche und einer durch L_1 gelegten (projizierenden) Ebene. Im Punkte J ist $a = b = c$. Sehr häufig wählt man $b = c = 2a$. Diesen Werten entspricht Punkt D. Die zugehörigen Winkel berechnet man aus

$$\sqrt{1 - \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\gamma} = 2\sqrt{1 - \operatorname{cotg}\beta \cdot \operatorname{cotg}\gamma},$$

(wobei $\beta = \gamma$ und $\alpha + \beta + \gamma = 360^0$) mit

$$\beta = \gamma = 131^0\,25', \quad \alpha = 97^0\,10'$$

oder $n = 41^0\,25'$ und $m = 7^0\,10'$.

Auf zeichnerischem Wege erhält man nach dem Satz von Weisbach die Winkel aus einem Dreieck mit den Seiten a^2, b^2 und c^2. Für die dimetrische Projektion wird dieses Dreieck gleichschenklig, Winkel an der Spitze $= 2m$. Mit $b:c:a = 2:2:1$ wird $\sin m = \frac{{}^1/_2\, a^2}{b^2}$ $= {}^1/_8$ und $m = 7^0\,10'$.

Berlin. C. Volk. 491

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die Sortiment-Abteilung des VDI-Verlages, Berlin SW 19, Beuthstraße 7, zu beziehen.)

RIEMANN-WEBER. Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik als 7. Auflage von Riemann-Webers Partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, herausgegeben von Dr. **PHILIPP FRANK,** o. Prof. an der Deutschen Universität in Prag und Dr. **RICHARD v. MISES,** o. Professor an der Universität Berlin. Erster (mathematischer) Teil herausgegeben von Dr. Richard v. Mises. Mit 76 Abb. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., Braunschweig 1925. XX + 686 S. Preis geb. 44 M.

Die neuen Herausgeber — R. von Mises, Berlin und Ph. Frank, Prag — haben die Verantwortung nicht gescheut, das Buch bei der Neubearbeitung einer grundlegenden Umgestaltung zu unterziehen, und wenn damit auch manches von der Eigenart des alten Buches verloren gegangen ist, so wird man doch ihrem Vorgehen die Berechtigung nicht absprechen können. Hält man nämlich die ursprüngliche Hattendorfsche Bearbeitung einmal neben den späteren Riemann-Weber, und vergleicht damit das neue Buch, so erkennt man, daß die Entwicklung des Buches im großen und ganzen der Fortbildung der Wissenschaft parallel gegangen ist, beginnend zu den Zeiten, wo Dirichlet als erster an deutschen Universitäten regelmäßige Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen hielt, bis heute, wo man mit den partiellen Differentialgleichungen und ihren Variationsproblemen bereits »die Techniker zu belästigen beginnt«. — So rechtfertigt sich vor allen Dingen die bemerkenswerteste äußere Veränderung, nämlich die Teilung des Werkes in den eben erschienenen ersten Band, der den mathematischen Teil enthält, und einen zweiten, der die Anwendungen auf die physikalischen Probleme bringen wird. Es wäre wohl in der Tat kaum möglich gewesen, bei einer Darstellung im Stile des alten Buches die Geschlossenheit des Aufbaues zum Ausdruck zu bringen, welche die Theorie der partiellen Differentialgleichungen durch die Entwicklung der Variationsrechnung und der Theorie der linearen Integralgleichungen in den letzten zwanzig Jahren gewonnen hat.

So bringt also der erste Band das mathematische Fundament, auf dem die Anwendungen des zweiten sich aufbauen sollen, und zwar auf

ziemlich breiter Basis, indem die erforderlichen mathematischen Hilfsmittel aus den Grundlagen heraus entwickelt werden. Daß dabei bezüglich der Beweise teilweise auf andere Literatur verwiesen werden mußte, ist mit Rücksicht auf den Umfang des Buches selbstverständlich.

Was abgesehen von einer allgemeinen Vertiefung gegenüber den früheren Auflagen hinzugekommen ist, geht aus dem früher Gesagten hervor. Die Theorie der linearen Integralgleichungen findet eine übersichtliche Darstellung in dem von v. Mises, die Variationsprobleme der partiellen Differentialgleichungen in dem von Courant bearbeiteten Abschnitt. Auf dieser Grundlage (im Verein mit den klassischen Untersuchungen) wird die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen — Existenzsätze, Abhängigkeit von Rand- und Anfangswerten, Eigenwertstheorie — aufgebaut (Löwner, v. Mises, Rademacher, Rothe, Szegö), d. h. es wird das Gebäude errichtet, von dem wir im alten Riemann-Weber nur einzelne, wenn auch wichtigste Bausteine finden. Auch in der Darstellung der gewöhnlichen Differentialgleichungen, ihrer Randwertaufgaben und Reihenentwicklungen sind moderne Gesichtspunkte in den Vordergrund gestellt (Bieberbach, v. Mises, Szegö). Als ein Glanzstück sei die für die klassische Mechanik bestimmte allgemeine Variationsrechnung von Carathéodory erwähnt.

Daneben ist es begrüßenswert, daß auch elementarere Dinge von besonderer Bedeutung wie die linearen Gleichungen und das Hauptachsenproblem eine relativ ausführliche Darstellung erfahren haben. — Einige mathematisch tiefer liegende Sätze, die für die zu behandelnden physikalischen Aufgaben nicht unmittelbar erforderlich erscheinen, werden demjenigen willkommen sein, der die Probleme der angewandten Mathematik von gesicherter mathematischer Grundlage aus behandeln will.

Im einzelnen wird man dies oder jenes zu kritisieren wissen; ich hätte, um ein Beispiel zu nennen, der asymptotischen Integration von Differentialgleichungen eine Erwähnung gegönnt, aber dies ist Sache der persönlichen Einstellung und dann wird man den zweiten Band abwarten müssen, der noch manche Ergänzung bringen wird, und zu einer Gesamtbeurteilung eigentlich unentbehrlich ist.

Sieht man das Buch vom Standpunkt des Studierenden an, so wird man nicht leugnen können, daß es ziemlich hohe Forderungen an die Schulung des Lesers stellt, auch wenn man sich die Lektüre so denkt, daß der erste Band weniger für sich gelesen sein will, als daß er als mathematischer Berater beim Studium des zweiten Bandes dem Leser zur Seite stehen soll. Dafür ist das gesteckte Ziel ein hohes und wenn es erreicht wird, so wird das Buch in seiner jetzigen Gestalt ebensoviel zur Verbreitung der mathematischen Kenntnis unserer Tage beitragen, wie es Heinrich Webers Meisterwerk zu seinen Zeiten getan hat.

Mit den Herausgebern und den Bearbeitern wird das mathematische Publikum dem Verlage für die Neuherausgabe Dank wissen. Daß die äußere Ausstattung vorzüglich ist, bedarf kaum der Erwähnung; nur wird man bedauern, daß die Modernisierung sich in erschreckendem Maße auch auf den Preis des Buches erstreckt hat. Trefftz. 586

VICTOR **FISCHER.** Eine Darstellung des Nernstschen Wärmetheorems. Erster Teil mit sechs Abbildungen. Verlag Blazek & Bergmann, Frankfurt a. M. 1923. 23 S. Nachträglich im Selbstverlag übernommen. — Zweiter Teil. Verallgemeinerung des Theorems. Mit zwölf Abbildungen. Selbstverlag des Verfassers, Frankfurt a. M.-Süd, 1923. 44 S.

Im ersten Teil geht der Verfasser vom Nernstschen Wärmetheorem in der Form

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = 0$$

für $T = 0$ aus. Er leitet daraus durch sehr anschauliche geometrische Betrachtungen die bekannten Folgerungen des Nernstschen Satzes ab.

Im zweiten Teil seiner Abhandlung stellt der Verfasser weitere ähnliche Grenzbedingungen zur Bestimmung der Eigenschaften der Körper, insbesondere der Zustandsgleichung, auf. So setzt er für $p = \infty$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = 0 \quad \text{und} \quad v = 0$$

und in einem anderen Abschnitt für Gase für $p = 0$

$$p\,v = R\,T.$$

Daß derartige Axiome aber physikalisch nicht ohne weiteres zulässig sind, zeigt sich an der Unrichtigkeit der Folgerung, die der Verfasser aus dem letzten Ansatz zieht. Er schließt daraus, daß für $p = 0$ auch

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = 0$$

sein müsse. Dies steht aber im Widerspruch mit den ausgezeichneten Versuchen von Holborn und seinen Mitarbeitern über die Isothermen der Gase. Diese ergeben, daß beim Druck null

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T > 0$$

ist. Der Ansatz des Verfassers gibt auch für $p = 0$ den Drosseleffekt null, was ebenfalls den Versuchen widerspricht.

Leider wird das Studium der sonst sehr originalen Abhandlung durch die fast unleserliche Beschriftung der Figuren erschwert.

Nußelt. 569

ARTHUR **HAAS,** Dr. Phil., A. O. Professor an der Universität Wien. Einführung in die theoretische Physik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Erster Band. Mit 72 im Text und auf zwei Tafeln. Dritte und vierte, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1924. VIII + 379 S. Preis geh. 8,50, geb. 10 M.

Gegenüber der vorigen Auflage ist der erste Band dadurch verändert, daß die Vektor- und Tensorrechnung in besonderen Kapiteln behandelt wird. Dadurch sind bei den einzelnen physikalischen Problemen, die auf gleiche vektoranalytische Umformungen führen, Wiederholungen vermieden und es konnte Raum für einige früher nicht behandelte Themen gewonnen werden, wie: Bewegungsvorgänge auf der rotierenden Erde, elastische Wellen, Selbstinduktion u. a. Im zweiten Band wurde die Atomtheorie auf das dreifache des bisherigen Umfanges vermehrt und dadurch der größte Vorzug des Buches noch mehr herausgearbeitet, nämlich zugleich mit einer Einführung in die Elemente der theoretischen Physik dem Studierenden sofort auch einen gründlichen Einblick in die eben so kräftig aufblühenden Vorstellungen über die Struktur der Materie zu ermöglichen. Die Abschnitte über Relativitätstheorie sind mit Hilfe des verstärkten vektoranalytischen Rüstzeuges etwas zusammengezogen und dabei manche Unklarheiten präzisiert. Doch ist dabei die Darstellung noch abstrakter geworden, so daß mir scheint, daß diese Abschnitte pädagogisch nicht so gelungen sind wie alle übrigen, die das Buch für die Studierenden der mittleren Semester so empfehlenswert machen. Ph. Frank. 562

ADOLF **KISTNER,** Der Feinaufbau der Materie. Wissen und Wirken. Einzelschriften zu den Grundfragen des Erkennens und Schaffens. 6/7. Band. G. Braunsche Hofbuchdruckerei und Verlag, Karlsruhe i. B 1923. 130 S.

Der Verfasser behandelt in pädagogisch sehr gelungener Art die modernen Vorstellungen über den Aufbau der Moleküle aus Atomen und der Atome aus Elektronen. Es sind überall nur ganz geringe Kenntnisse vorausgesetzt und alle neuen Begriffe von der Basis der Schulphysik aus in sehr schlichter und klarer Sprache erklärt. Nur wo der Verfasser in die Nähe der Relativitätstheorie kommt, merkt man an der Darstellung eine gewisse Verschwommenheit der Umrisse. Da die Sammlung, der das Büchlein angehört, nach den Einführungsworten »mithelfen will, daß wieder innere Einheit des Menschentums erwachse«, sollen die Grundfragen »in philosophischem Geist« behandelt werden. Dieser besteht bei dem Verf. darin, daß er konstatiert, man stehe vor der Frage, was die Materie »sei«, noch immer genau so ratlos, wie die jonischen Philosophen. Und auch die Erkenntnis von der energetischen Natur der Masse habe das Problem nur verschoben, weil man auch nicht wisse, was Energie »sei«. Ph. Frank. 563

FELIX **AUERBACH,** Physik in graphischen Darstellungen. 1557 Fig. auf 257 Taf. Mit erläuterndem Text. Zweite Auflage. Verlag von B. G. Teubner, Berlin 1925. Preis geb. 14 M.

Während den anderen Lehrbüchern der Physik Figuren zur Erläuterung des Textes beigegeben sind, versucht der Verf. den umgekehrten Weg: er gibt eine Sammlung von Figuren mit erläuterndem Text. Die Erweiterungen der neuen Auflage beziehen sich besonders auf die Gebiete, die in den letzten Jahren im Zentrum des Interesses standen. Mehrere Tafeln erläutern die Relativitätstheorie, das periodische System der Elemente mit der Lehre von den Isotopen, die Röntgenspektren und ihre Anwendung auf die Untersuchung der Krystallstruktur. Auch der Anwendung der neuesten Physik auf alte technische Probleme sind einige neue Tafeln gewidmet: dem Verhalten der Materialien über der Fließgrenze und den Erscheinungen an permanenten Magneten.

Es ist sicher, daß in manchen Fällen ein Blick auf eine der Tafeln des Verf. rascher und übersichtlicher über ein Ergebnis der Physik unterrichtet als das Durchlesen einiger Seiten in einem Lehrbuch oder gar das Studieren einer Tabelle. Ph. Frank. 567

T. **LEVI-CIVITA,** Professor in Rom. Fragen der klassischen und relativistischen Mechanik. Vier Vorträge gehalten in Spanien im Januar 1921. Uutorisierte Uebersetzung. Mit 13 Textfig. Verlag von Julius Springer, Berlin 1921. VI + 110 S. Preis 5,40 M.

In jedem der vier Vorträge wird ein Thema aus dem Arbeitsgebiet des Verf. behandelt. Seine große Vielseitigkeit bringt es mit sich, daß dabei vier ganz getrennte Fragen besprochen werden, so daß jeder Vortrag für sich ein abgeschlossenes Ganzes darstellt und mit Nutzen einzeln gelesen werden kann. Der Verf .setzt überall erst den Stand des Problems auseinander und zwar weniger durch trockene Literaturangaben als durch psychologisch sehr geschickt durchgeführte Lenkung des Interesses von Dingen, die jedem Leser von durchschnittlicher theoretisch-mechanischer Bildung vertraut sind; zu den teilweise sehr schwierigen Problemen, mit deren Lösung sich der Verf. mit so viel Erfolg beschäftigt hat. Das Schriftchen gehört zu den wenigen, in denen dem Leser die Ergebnisse der neuesten Forschung auf dem Gebiete der theoretischen Mechanik weder in der langes Versenken in ein Spezialgebiet erfordernden Art der Originalabhandlungen, noch in der oft ermüdenden Pedanterie der Lehrbücher dargeboten werden, sondern in einer Art, die man am bester als anmutig und human bezeichnen kann. Ganz besonders gilt das von dem ersten Vortrag: »Die Regularisierung des Drei-Körperproblems und ihre Tragweite«. Der Verf. setzt auseinander, worin dieses oft als »unlösbar« bezeichnete Problems eigentlich besteht und insbesondere die neuesten Fortschritte, die durch Painlevé, Sundman und ihn selbst dadurch erzielt wurden, daß sich das Verhalten der Körper in der Nähe eines Zusammenstoßes zweier von ihnen als verhältnismäßig »harmlos« nachweisen ließ. Der zweite Vortrag handelt über »Ausbreitung von Flüssigkeitswellen in Kanälen«. Der Verf. behandelt die zweidimensionale Potentialbewegung einer idealen

Flüssigkeit im Schwerefeld, bei der die Teilchen nur kleine Abweichungen aus ihrer Ruhelage aufweisen und die Oberfläche von einer Kurve gebildet wird, deren Gestalt immer gleich bleibt, die aber mit einer Geschwindigkeit über die Oberfläche hinwandert, die groß gegen die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen ist. Damit ist nach dem Verf. das gekennzeichnet, was man anschaulich als »Wellenbewegung« bezeichnet. Der dritte Vortrag behandelt »Parallelismus und Krümmung in einer beliebigen Mannigfaltigkeit«, der vierte »Die geometrisch Optik und das allgemeine Relativitätsprinzip«. In diesem sucht der Verf. die Einsteinsche Theorie von der Krümmung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld dadurch dem Leser näher zu bringen, daß er von der Analogie zwischen der gewöhnlichen geometrischen Optik und der Theorie der Bahnkurven nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung ausgeht, wobei sich die letzteren von den ersteren bekanntlich dadurch unterscheiden, daß sie noch von einem Parameter, der Energiekonstante, abhängen, der durch die Trägheit der Materie hereinkommt. Schreibt man der Lichtenergie auch Trägheit zu, so tritt auch in die Bahngleichungen der Lichtstrahlen eine Parameter, der vom Potential des Gravitationsfeldes abhängt und ihre Krümmung verursacht.

Ph. Frank. 568

Dr. HORST **v. SANDEN,** o. Professor an der Techn. Hochschule zu Hannover. Praktische Analysis. Zweite verbesserte Auflage. Mit 32 Abb. im Text. Handbuch der Angewandten Mathematik. Herausgegeben von Dr. H. E. Timerding. Erster Teil. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1923. XVIII + 195 S.

Das kleine Buch, das dem praktischen Rechner schon in seiner ersten Gestalt gute Dienste geleistet hat, bringt auf sehr knappem Raum im wesentlichen eine Uebersicht über die gebräuchlichen numerischen und graphischen Verfahren der praktischen Analysis. Wenn theoretisch einwandfreie Darstellung auch manchmal vermißt wird, entschädigt dafür die Vielseitigkeit und leichte Faßlichkeit. — Die zweite Auflage enthält mehrfache kleinere Aenderungen und Zusätze, so die Behandlung ganzer rationaler Funktionen im komplexen Gebiet. Hinzugekommen sind ferner eine Reihe von Uebungsbeispielen, die in der ersten Auflage fast ganz fehlten; allerdings sind es noch immer recht wenige.

H. Pollaczek-Geiringer. 561

Professor Dr. TH. **v. KÁRMÁN,** Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen. Heft 4. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. 48 S. Preis 5,10 M.

Das unter Leitung von Prof. v. Kármán stehende Aachener Aerodynamische Institut, das sich großen Ansehens in allen Fachkreisen erfreut, gibt jetzt in zwanglos erscheinenden Heften Berichte über seine Forschungsergebnisse heraus. Das eben erschienene Heft, das die Nummer 4 trägt (die drei ersten Hefte waren im wesentlichen Sonderdrucke aus unserer Zeitschrift und der Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt), enthält vier Aufsätze, von denen die beiden ersten den Lesern unserer Zeitschrift zum Teil auch schon bekannt sind, nämlich Br. Eck über »Potentialströmung in Ventilen«[1]) und Th. v. Kármán, »Gastheoretische Deutung der Reynoldsschen Kennzahl«[2]). Weiterhin bringt das Heft eine Wiedergabe des von v. Kármán in Delft gehaltenen Vortrags über die Stabilität der Laminarströmung und die Theorie der Turbulenz sowie einen Aufsatz von Eck und Kayser über die Anwendung nomographischer Methoden in der Thermodynamik.

Mises. 611

NACHRICHTEN

A. A. Friedmann †. Am 16. September d. J. ist in Leningrad Prof. Alexander Alexandrowitsch Friedmann, Direktor des Geophysikalischen Zentralobservatoriums, nach kurzer Krankheit (Typhus) gestorben. Friedmann, am 17. Juni 1888 geboren, hat somit nicht einmal das 38. Lebensjahr vollendet. Sein früher Tod bedeutet für die angewandte Mathematik und nicht zum wenigsten für die Meteorologie, deren Probleme eine mit der Zeit steigende Anziehungskraft für ihn gehabt haben, einen schweren Verlust. Friedmann begann sein Hochschulstudium an der Petersburger Universität im Jahre 1906. Noch als Student legte Friedmann, der sich selbst immer als Schüler W. A. Stekloffs bezeichnet hat, eine gemeinsam mit I. D. Tamarkin verfaßte Arbeit »Untersuchung der unbestimmten Gleichungen II. Ordnung« vor, die von der physikalisch-mathematischen Fakultät der Universität Petersburg mit einer goldenen Medaille ausgezeichnet wurde. An diese Erstlingsarbeit schließt sich eine lange Reihe von Untersuchungen an, die teils der reinen, teils der angewandten Mathematik angehören und deren Anzahl, ganz abgesehen von ihrer hohen Qualität, um so überraschender ist, als Friedmanns große Arbeitskraft und Organisationstalent während des Krieges in großem Umfange für militärische Zwecke (Flugwesen) ausgenützt worden sind. Sogar als aktiver Flieger hat er sich während des Krieges betätigt, hat sich aber hauptsächlich um die Organisation des aero-navigatorischen Dienstes auf sämtlichen Fronten der russischen Armee, die nach seinen Plänen erfolgte, verdient gemacht. Es ist hier nicht der Platz, die wechselvollen äußeren Schicksale Friedmanns zu schildern und die verschiedenen Stellungen, die

[1]) **Ein Auszug aus dieser Arbeit erschien diese Zeitschr. Bd 4 (1924), S. 464 bis 474.**

[2]) **Vergl. diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), S. 395 bis 396.**

er während der unruhigen Zeiten nach dem Kriege bekleidet hat, aufzuzählen. Seine Begabung für Behandlung von Problemen der angewandten Mathematik hatte bereits im Jahre 1914 den Direktor des Physikalischen Zentralobservatoriums, B. B. Golitzin, veranlaßt, Friedmann, der im Herbst 1913 den Grad eines Magisters der reinen und angewandten Mathematik an der Petersburger Universität erworben hatte, nach Leipzig zu entsenden, wo er sich bei V. Bjerknes mit den neuen Methoden der dynamischen Meteorologie vertraut machte. Diese Kommandierung mag den Anlaß gegeben haben, daß Friedmanns Arbeiten, soweit sie nicht rein mathematischen Inhalts waren oder sich mit Problemen der Relativitätstheorie beschäftigten, sich hauptsächlich mit Fragen der atmosphärischen Dynamik befaßten. Diesem Gebiet gehört auch die Arbeit an, die er im Delft-Heft dieser Zeitschrift 1924 veröffentlicht hat[1]). Die mächtige Förderung, die in Rußland der Meteorologie nach dem Kriege zuteil wurde, führte zur Einrichtung einer eigenen Abteilung für theoretische Meteorologie am Geophysikalischen Zentralobservatorium in Leningrad, für deren Leitung niemand besser sich eignen konnte als Friedmann. In dieser Stellung, seit Februar 1925 als Direktor des gesamten Observatoriums, hat er neben zahlreichen eigenen Arbeiten trotz seiner Jugend und trotz der Kürze seines Wirkens bereits eine Reihe von Schülern heranbilden können, so daß zu erwarten ist, daß trotz seines frühen Todes die von ihm gewiesene Arbeitsrichtung in Rußland mit Energie weiter verfolgt werden wird. Für das Observatorium ist der Verlust des jungen, höchst aktiven und ideenreichen Forschers allerdings sehr schwer. Zu deutschen Fachgenossen stand Friedmann, ein in der Form liebenswürdiger, in der Gesinnung vornehmer Mann, in enger Beziehung, die zum Teil auch persönlich-freundschaftlicher Natur waren. Die nach dem Kriege eingetretene nahe Verbindung zwischen deutscher und russischer Meteorologie, die auch in sachlicher Beziehung sich bereits als sehr fruchtbar erwiesen hat, ist wesentlich ein Verdienst A. Friedmanns.

Berlin. H. v. Ficker. 605

Gerhard Hessenberg †. Eines jähen und unerwarteten Todes verschied in der Nacht vom 15. zum 16. November Herr Gerhard Hessenberg, der wenige Tage zuvor eine Professur für darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule in Charlottenburg angetreten hatte. Hessenberg, am 16. August 1874 zu Frankfurt a. M. geboren, studierte Mathematik an der Berliner Universität, habilitierte sich sodann an der Technischen Hochschule in Charlottenburg, wurde 1903 Dozent an der Militärtechnischen Akademie, 1907 Professor an der Landwirtschaftlichen Hochschule Bonn-Poppelsdorf. Von hier kam er als Professor der darstellende Geometrie an die Technische Hochschule in Breslau und schließlich 1919 als Mathematiker an die Universität Tübingen, wo er bis zum Ende des letzten Sommer-Semesters verblieb. Hessenberg gehörte zu den ganz Wenigen unter den heutigen Mathematikern, die für die Geometrie als die Lehre von den konkreten räumlichen Gestaltungen etwas übrig haben. Mit großem Scharfsinn in der Behandlung abstrakter, in die Erkenntnistheorie übergreifender Probleme verband er eine gewisse Vorliebe für anschauliche, besonders konstruktive Fragen der Geometrie. Seine Vorlesungen über darstellende Geometrie unterstützte er gern durch die Vorführung stereoskopischer Bilder, die er selbst mit großer Kunstfertigkeit herstellte. In dem für einen etwas weiteren Leserkreis bestimmten Buche über die Transzendenz von e und π sowie in seiner Tübinger Antrittsvorlesung »Vom Sinn der Zahlen« suchte er bei allem Ernst der wissenschaftlichen Behandlung des Gegenstandes einen humorvollen, unterhaltenden Ton zu finden. Bekannt ist sein kleines Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, das in der Sammlung Göschen erschienen ist. In das Gebiet der angewandten Mathematik fällt eine kleine Schrift, die wohl die letzte Veröffentlichung des Verstorbenen geworden ist: »Gelenkmechanismen zur Kreisverwandtschaft«.

Hessenberg erfreute sich unter seinen Kollegen, namentlich unter den Mathematikern seiner Generation, großer Beliebtheit. In der persönlichen Unterhaltung sowie in der wissenschaftlichen Diskussion geistreich, treffsicher und voller Humor erwarb er sich leicht Sympathien, die bei näherer Bekanntschaft durch die vortrefflichen Eigenschaften seines Charakters nur verstärkt wurden. Die Charlottenburger Hochschule, die sich viel von dem Neuberufenen erwarten durfte, erfährt durch den Tod Gerhard Hessenbergs einen empfindlichen und schwer ersetzbaren Verlust.

614

Jahrhundertfeier der Technischen Hochschule Karlsruhe. Mit Beginn des neuen Semesters begeht die Technische Hochschule in Karlsruhe die Feier ihres hundertjährigen Bestehens. Zu diesem Feste soll die Hochschule, die mehr als irgendeine andere in Deutschland zur Förderung der technisch-wissenschaftlichen Mechanik beigetragen hat, auch von uns einen Glückwunsch erhalten.

Gleich den beiden ältesten deutschen Hochschulen, der in Prag und in Wien, ist auch die Karlsruher aus höheren gewerblichen Lehranstalten hervorgegangen. Vom 7. Oktober 1825 ist der Erlaß datiert, mit dem sie als »Polytechnische Lehranstalt« begründet wurde. Im Jahre 1841 wurde der Steirer Ferdinand Redtenbacher, der in Wien seine Ausbildung erhalten hatte, und dann kurze Zeit in Zürich tätig gewesen war, als Professor der Mechanik nach Karlsruhe berufen. Hier entfaltete er eine Tätigkeit von nachhaltiger Wirkung, indem er durch seine viel verbreiteten Lehrbücher »Die Resultate für den Maschinen-

[1]) Ueber Wirbelbewegung in einer kompressiblen Flüssigkeit. Diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), S. 102 bis 107.

bau« 1848, »Die Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaus« 1852 und den dreibändigen »Maschinenbau« 1862 bis 1865 der mechanisch-technischen Wissenschaft in Deutschland zum ersten Male (abgesehen von dem etwas elementarer gehaltenen »Handbuch der Mechanik« des Pragers F. v. Gerstner) ein festes Fundament gab, wie es in Frankreich durch die Lehrer der École Polytechnique, namentlich Poncelet, früher geschaffen worden war. In einem originellen Buche »Die Gesetze des Lokomotivbaus« 1855 erhob sich Redtenbacher nicht unbedeutend über die französischen Vorbilder. Als Redtenbacher 1863 starb, wurde Franz Grashof sein Nachfolger, der Begründer des Vereines deutscher Ingenieure, dessen Name in der deutschen Technik in hohen Ehren steht. Von ihm stammt ein heute noch viel zu wenig gewürdigtes, dreibändiges Lehrbuch der theoretischen Maschinenlehre, das zahlreiche Probleme des Maschinenbaus in ausgezeichneter Weise mit den Hilfsmitteln der theoretischen Mechanik und Wärmelehre behandelt. Bekannter ist seine »Elastizität und Festigkeit« 1866 und 1878, die vieles enthält, was in den Lehrbüchern der späteren Generation, die gewiß ihre Vorzüge in andern Richtungen haben mögen, sehr zum Schaden der Technik sich wieder verloren hat. Ein weiteres ausgezeichnetes Lehrbuch der Mechanik, das dem Unterricht an der Karlsruher Hochschule seine Entstehung verdankt, ist »Die Theorie der Bewegung und der Kräfte« von Wilhelm Schell, zuerst erschienen 1870, dann in zweiter erweiterter Auflage 1878 bis 1880. Auch aus diesem Buche könnten manche heutige Lehrbuchverfasser noch vieles lernen, was den Ingenieuren zu wissen gut wäre. Schließlich mag von noch Lebenden Karl Heun genannt werden, der wohl seit einer Reihe von Jahren den größten Teil seiner Lehrtätigkeit aufgeben mußte. Sein bekanntes Referat über »Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik«, 1900 setzt in würdiger Weise die Traditionen Redtenbachers, Grashofs und Schells fort.

Auf etwas anderem, aber verwandtem Gebiete liegt das schönste Ruhmesblatt der Karlsruher Hochschule, die die Auszeichnung genossen hat, Heinrich Hertz unter ihre Lehrer zu zählen. Hier in Karlsruhe hat Hertz seine grundlegenden Versuche über die elektrischen Wellen ausgeführt, womit er die ersten Voraussetzungen für die heute so bedeutende Technik der drahtlosen Nachrichtenübertragung schuf. Man kann der technischen Hochschule in Karlsruhe zu ihrem Festtage nur wünschen, daß sie auch weiterhin in der Auswahl ihrer Lehrer so glücklich, in der Ausbildung künftiger Ingenieure so erfolgreich und für die Entwicklung deutscher Technik und Industrie so leistungsfähig sich zeigen möchte wie bisher.

Ausschuß für graphische Rechenverfahren. In der am 22. Oktober abgehaltenen Sitzung hielt der stellvertretende Vorsitzende, Herr Regierungsbaumeister Dipl.-Ing. Eisner einen Nachruf für den Verstorbenen Obmann Dr.-Ing. Kretschmer. Die Versammlung wählte einstimmig an Stelle des Verstorbenen Herrn Studienrat Dr. H. Schwerdt zum Vorsitzenden. 607

Ausschuß für Schwingungen im VDI. Der zur Behandlung von Fragen auf dem Gebiete der mechanischen Schwingungen beim Verein deutscher Ingenieure bestehende Ausschuß hielt am 21. Oktober eine Sitzung ab, in der über die bisherigen Versuche zur Bestimmung der Schwingungs-Dauerfestigkeit bei hohen Frequenzen berichtet wurde.

1. Es wurden Versuche mit einseitig eingespannten Stäben aus hochwertigem Stahl durchgeführt, die mit 1000 Schwingungen in der Sekunde auf Biegungsfestigkeit beansprucht wurden. Die Frequenz des erregenden Wechselstromes wurde durch Verstärkerröhren aufrecht erhalten. Es wurden bisher Dauerversuche bei Zimmertemperatur und bei etwa 300° C durchgeführt, wobei die Belastungen rund 3000 kg je qcm betrugen. Die Stäbe hatten dabei eine Lebensdauer von etwa 2 Millionen Schwingungen, wonach ein mikroskopisch kleiner Riß in der Nähe der Einspannstelle auftrat; dieser führte zum Bruch des Stabes. Die Versuche werden weitergeführt und die Einrichtung für Längsschwingungsdauerversuche ausgebaut.

2. Es wurden Versuche mit Probestäben aus Baustoffen des Maschinenbaues durchgeführt, bei denen der Werkstoff durch Längsschwingungen auf Zug und Druck beansprucht wurden. Die Schwingungserregung von 1000 in der Sekunde erfolgt elektromagnetisch in einer eigens dazu gebauten Prüfmaschine. Durch eine besondere Einrichtung wurde erreicht, daß die Schwingungsweite auch bei kleinen Aenderungen der Periodenzahl der Erregung unbedingt konstant blieb. Zur Messung der Schwingungsweite wurde mit dem schwingenden Teller eine Zunge verbunden, die sich zwischen Elektromagneten bewegt. Die dabei entstehende elektromotorische Kraft dient zur Messung der Schwingungsweite, nachdem die ganze Einrichtung in geeigneter Weise geeicht wurde.

Die untersuchten Stäbe von 5 mm Durchmesser konnten mit beliebiger Belastung auf Dauerfestigkeit beansprucht werden. Die ersten Versuche zeigen den großen Einfluß der Hochfrequenz auf die Lebensdauer gegenüber den statischen Zerreißversuchen. Zur erschöpfenden Klärung des Verhaltens der Werkstoffe werden durch den Schwingungs-Ausschuß umfassende Versuche in Angriff genommen.

Adrian. 606

(Redaktionsschluß 5. Dezember 1925.)

Für die Schriftleitung verantwortl.: Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 52. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.

Fig. 1.

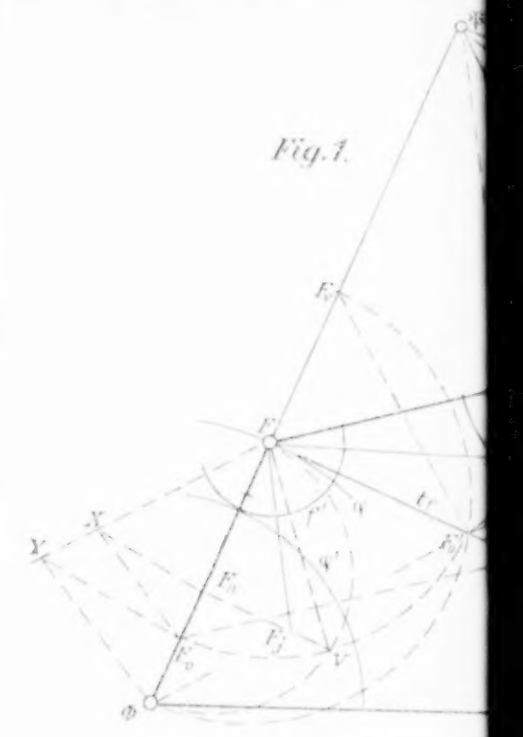
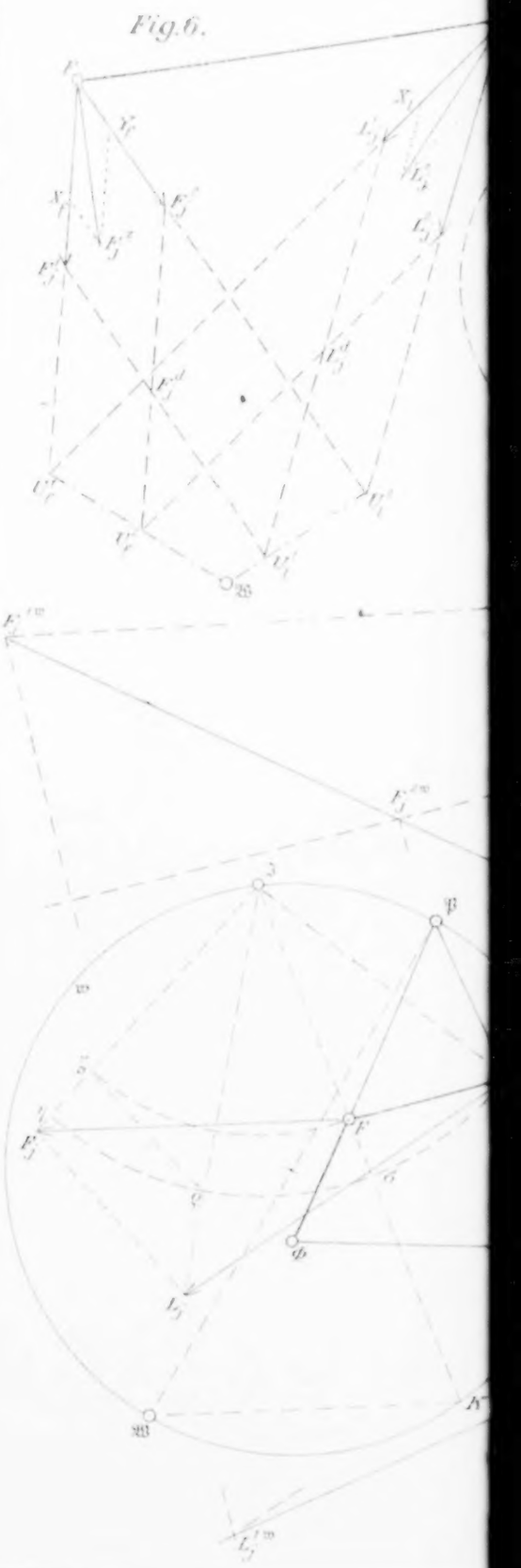


Fig. 6.



Photolithographie Dr. C. Wolf & Sohn,

Fig. 1.

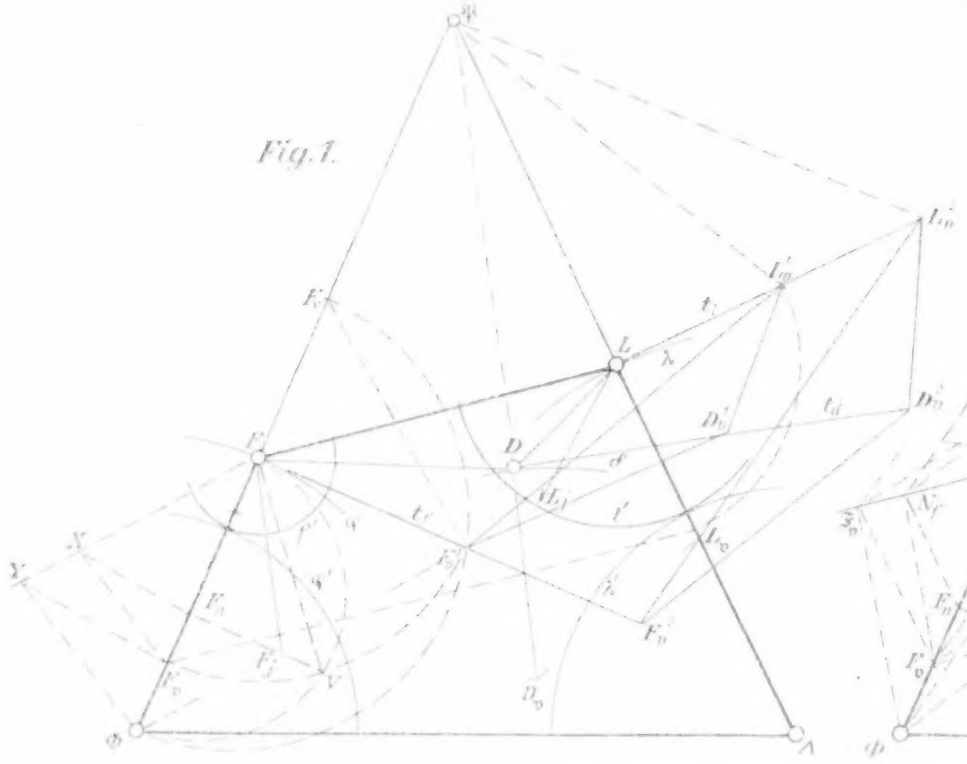


Fig. 2.

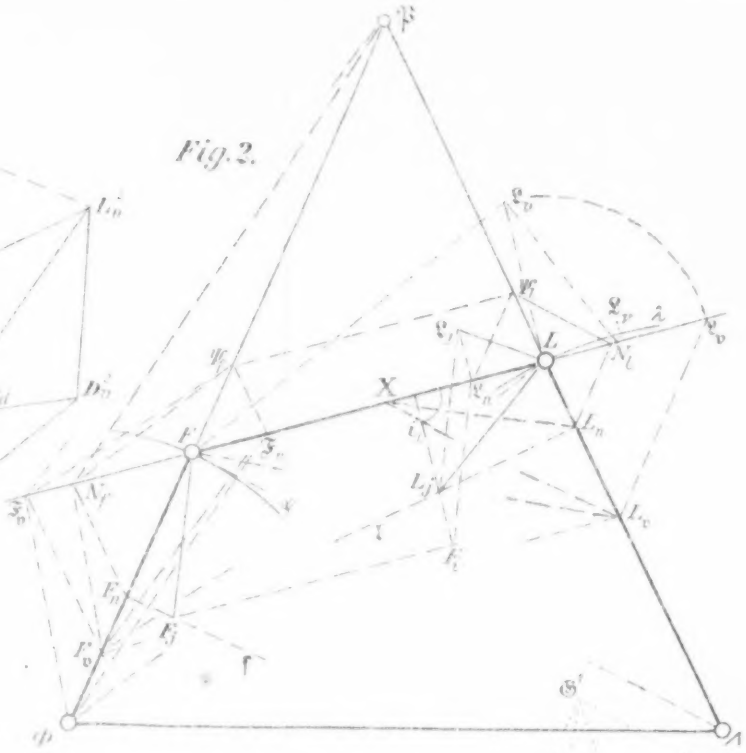


Fig. 3.

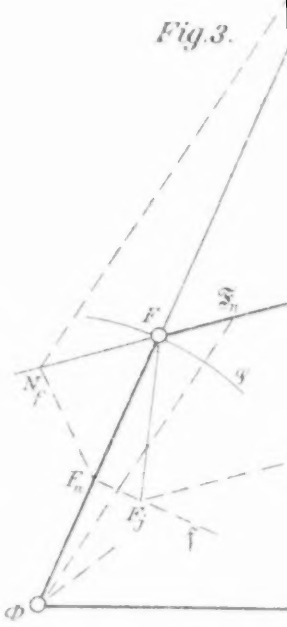


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

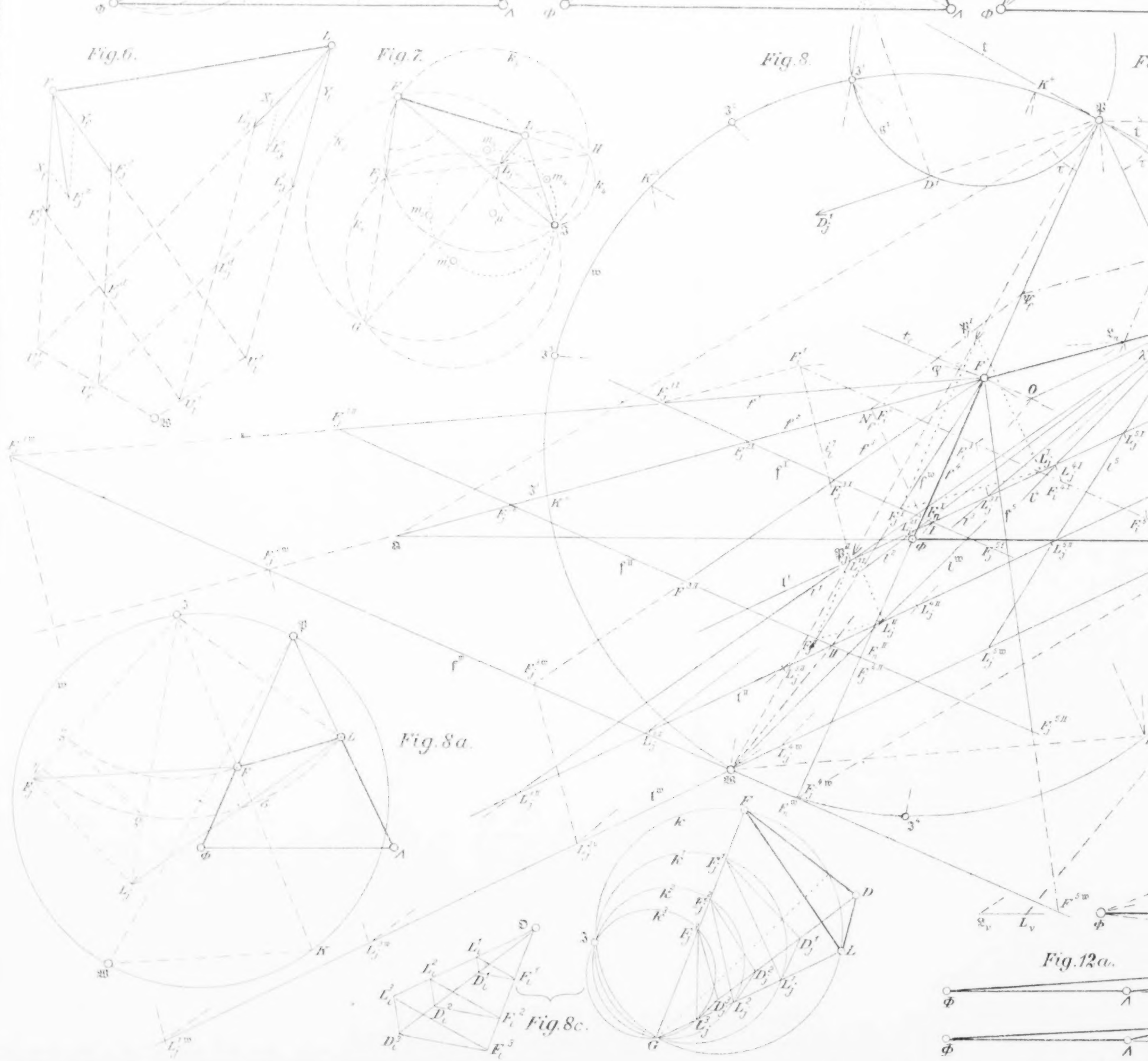


Fig. 8a.

Fig. 8c.

Fig. 12a.

Photolithographie Dr. C. Wolf & Sohn, München.

Fig.3.

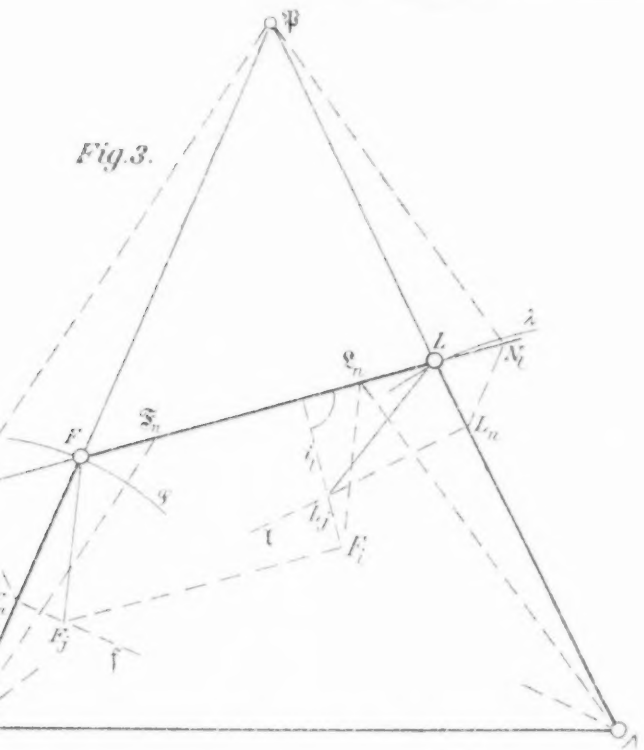


Fig.4.

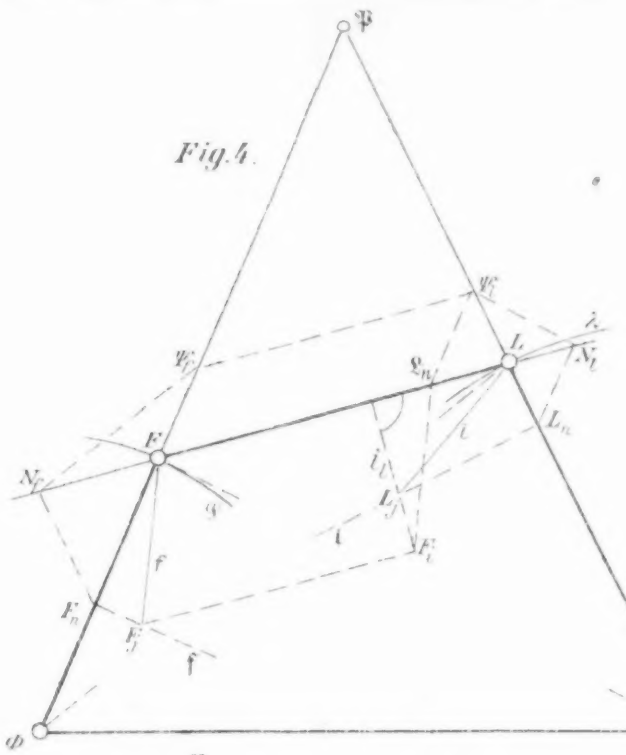


Fig.5.

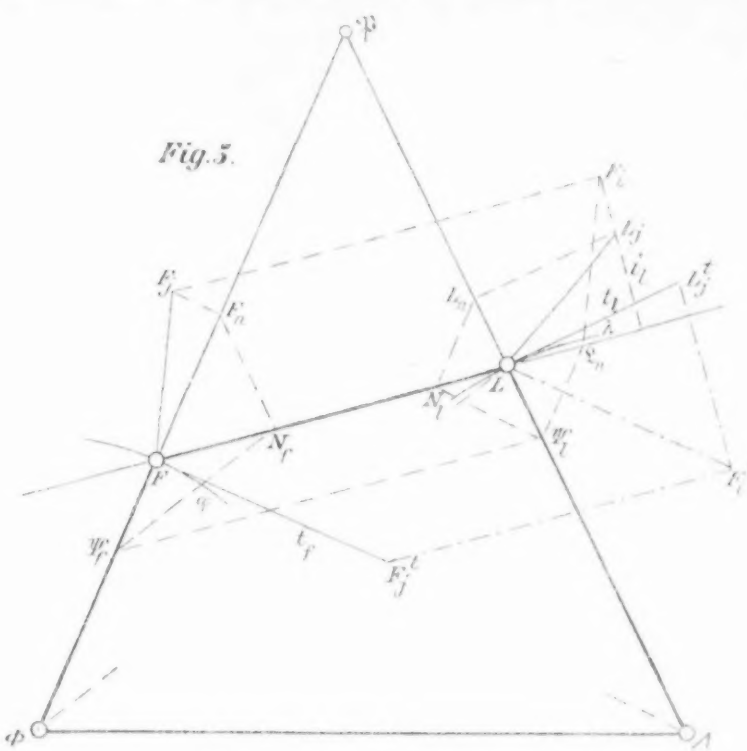


Fig.8b

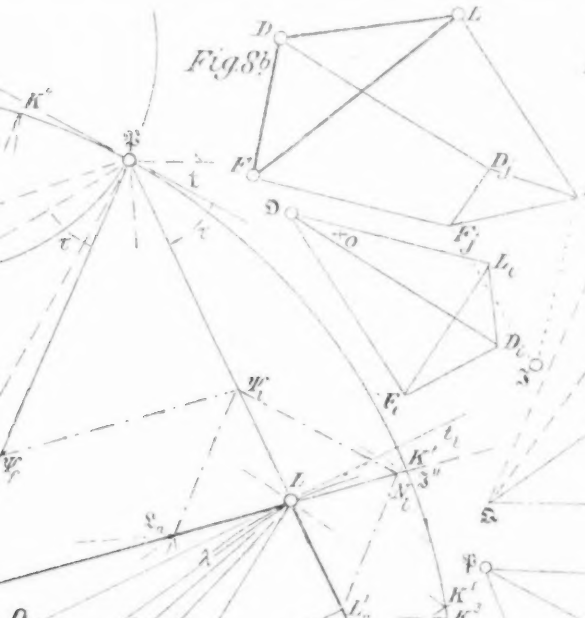


Fig.9.

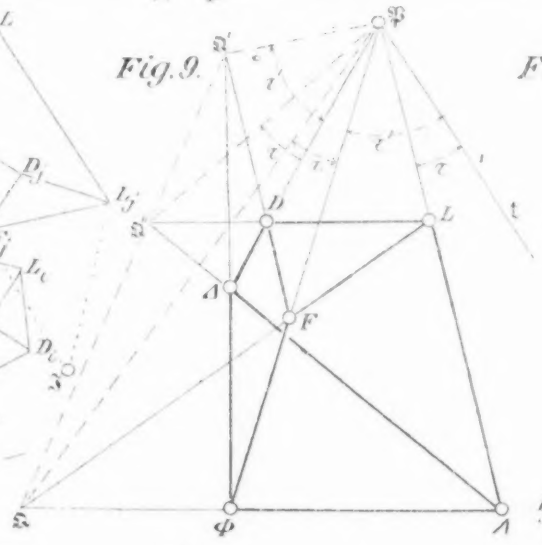


Fig.10.

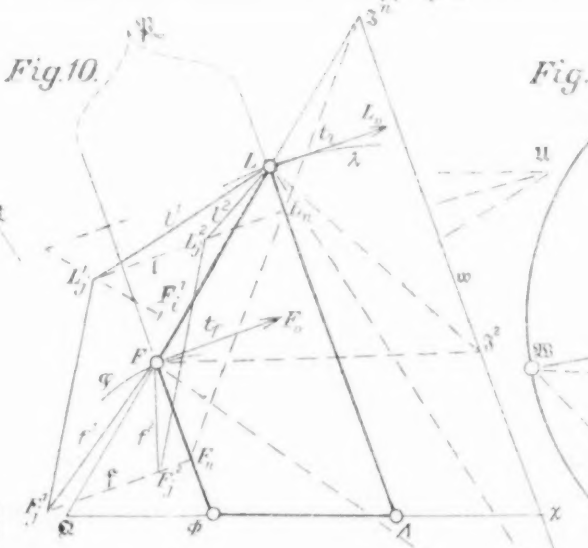


Fig.11.

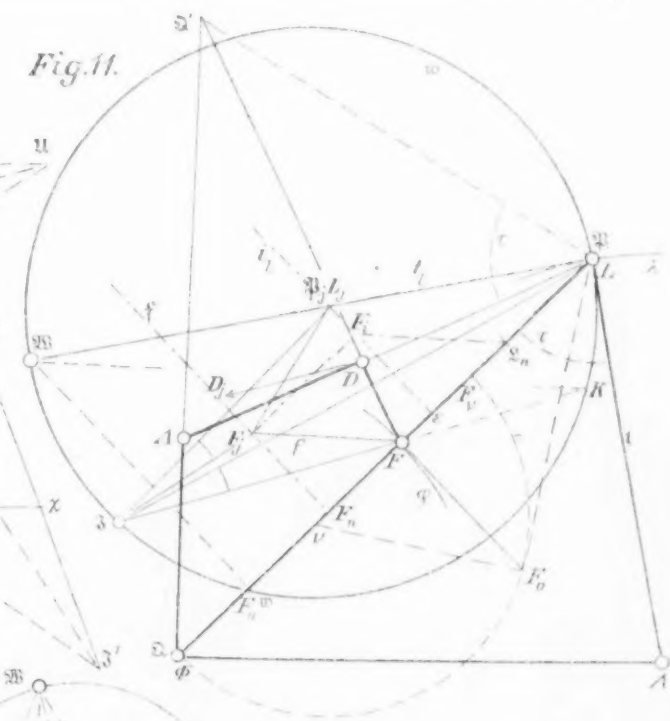


Fig.9a.

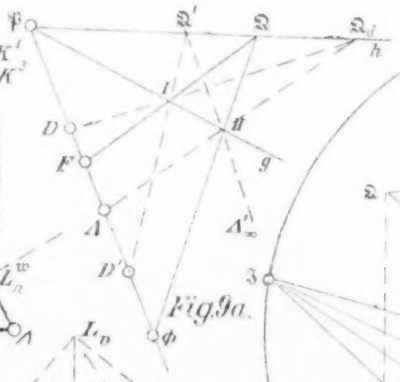


Fig.13.

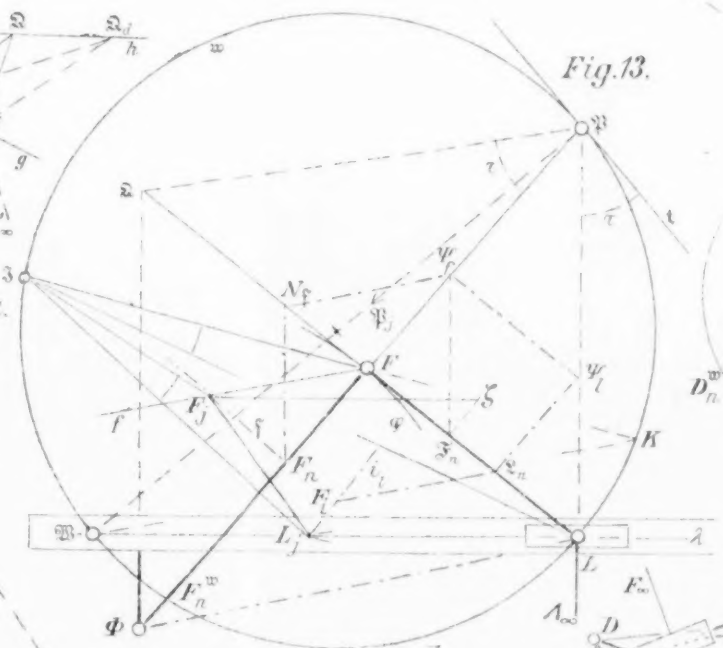


Fig.14.

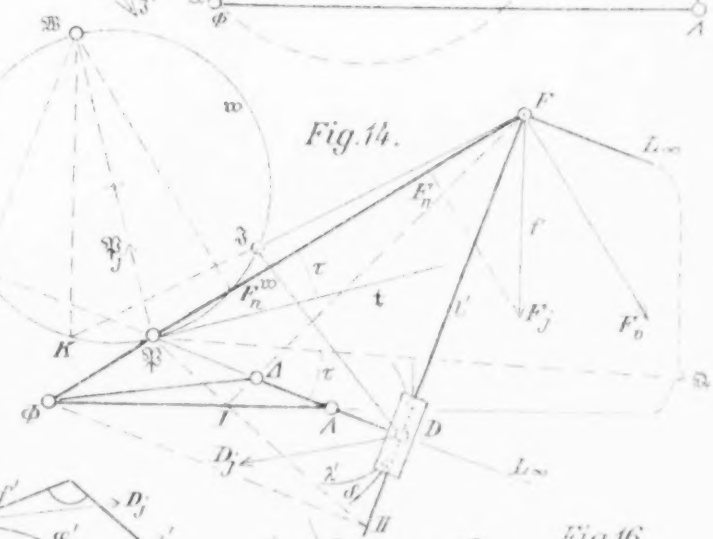


Fig.12.

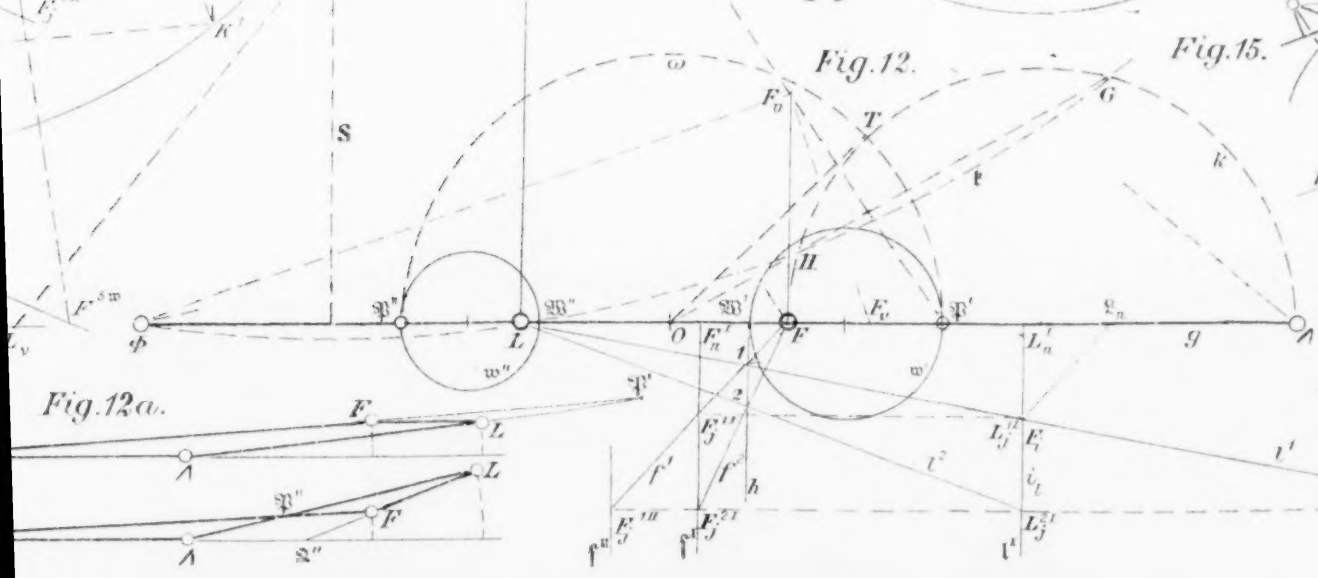


Fig.15.

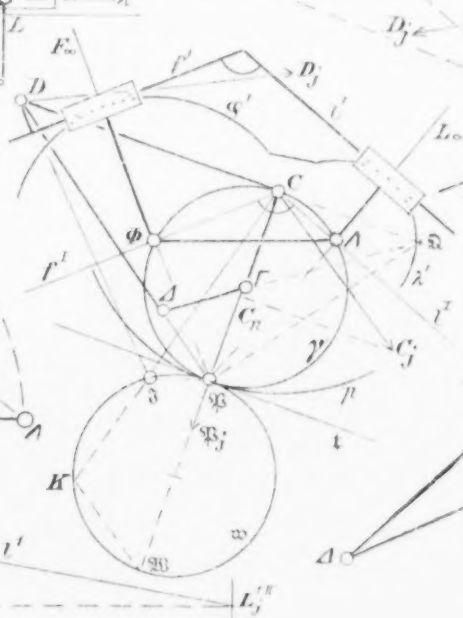


Fig.16.

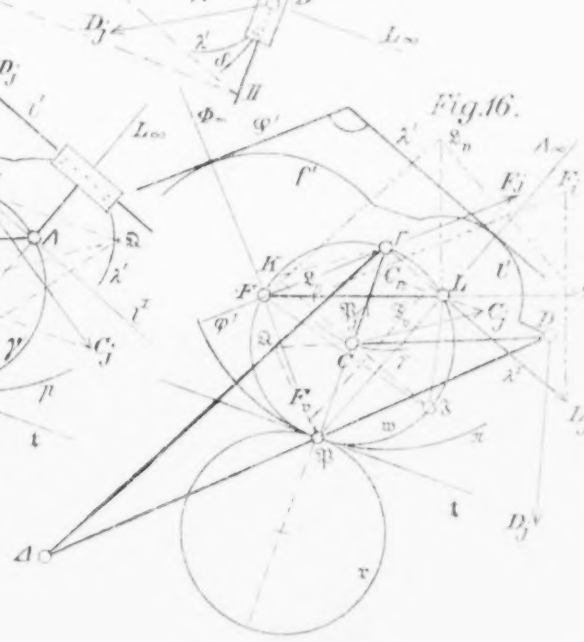


Fig.12a.

Konstr. L. Burmester.

BEITRÄGE ZUR GESCHICHTE DER TECHNIK UND INDUSTRIE

Jahrbuch des Vereines deutscher Ingenieure Band XV, 1925

Herausgegeben von

CONRAD MATSCHOSS

*

Gr. 8°, VI/306 Seiten mit 146 Abbildungen und 20 Bildnissen

Preis in Ganzleinen geb. RM 25.—. Vorzugspreis für V d I-Mitglieder RM 22.50

VDI-VERLAG BERLIN SW 19
G. M. B. H. BEUTHSTR. 7

Bezugsbedingungen: Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheint jährlich in 6 Heften. Bezug nur durch den Verlag. Probeheft gegen Berechnung.

Inland, Danzig, Memelgebiet:
a) Bestellung: Abonnements können jederzeit aufgegeben werden, müssen jedoch entweder mit dem 1. Januar oder 1. Juli beginnen und im voraus bezahlt werden. Die Zeitschrift wird, falls Abbestellung nicht am 1. Juni bezw. 1. November hier vorliegt, stets für ein Halbjahr weitergeliefert.
b) Lieferung: Zustellung erfolgt durch Kreuzband.
c) Bezugspreis: Für 1925 ganzjährlich RM. 24.—, halbjährlich RM. 12,— für Mitglieder des VDI, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik ganzjährlich RM. 21,60, halbjährlich RM. 10,80. Einzelheftpreis RM. 5,—, für Mitgl. RM. 4,50.

Dtsch.-Oesterreich, Luxemburg, Litauen:
a) Bestellung: siehe Inland unter a).
b) Lieferung: erfolgt durch Kreuzband.
c) Bezugspreis: wie Inland unter c) zuzüglich Porto ganzjährlich RM. 1,—, halbjährlich RM. 0,50. (Zahlungen aus Oesterreich sind auf das Postsparkassenkonto Wien 18373 des Herrn R. T. Süß, Wien I, Seilerstätte 16 zu überweisen.)

Ausland:
a) Bestellung: Abonnements können jederzeit aufgegeben werden, müssen jedoch entweder mit dem 1. Januar oder 1. Juli beginnen und im voraus für die Zeit bis zum Schluß des laufenden Jahrganges bezahlt werden. Die Zeitschrift wird, falls Abbestellung vier Wochen vor Jahresschluß beim Verlag nicht vorliegt, immer auf ein Jahr weitergeliefert.
b) Lieferung: Zustellung erfolgt durch Kreuzband.
c) Bezugspreis: wie Inland unter c) zuzüglich der Portokosten von RM. 1,80 ganzjährlich.

Erfüllungsort Berlin, Gerichtsstand Berlin-Mitte. Notwendig werdende Nachforderungen vorbehalten.

Anzeigenpreise

1/1 Seite	1/2 Seite	1/4 Seite	1/8 Seite	
133×210mm	133×104mm	65×104mm	65×52mm	Reichsmark
160,—	90,—	50,—	30,—	

Rabatt: Bei 6 Jahresaufnahmen 10 vH. Für Vorzugsseiten gelten besondere Preise.
Der Verlag behält sich vor, die Aufnahme von Anzeigen und Beilagen ohne Angabe von Gründen abzulehnen und laufende Aufträge einzustellen.
Annahmeschluß: 14 Tage vor Erscheinen der Zeitschrift.

VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN SW 19, BEUTHSTRASSE 7

Fernsprecher: Merkur 126-27, 4483-84, 5460, 6104, 6171, 7454. Postscheckkonto: Berlin 102373.
Drahtanschrift: Ingenieurverlag. Bankkonto.: Dresdner Bank, Dep.-Kasse F, Spittelmarkt.
Geschäftszeit: Sommer: 7 bis 4¼ Uhr, Winter: 8 bis 5¾ Uhr. Sonnabends bis 1 Uhr.

Wer nur für die Nähe

einer Brille bedarf, findet in der Zeiss-Punktal-Nahbrille ein praktisches und preiswertes Sehhilfsmittel. Nach unten hat man ein reichlich großes Blickfeld zum Lesen, Schreiben und für jegliche Naharbeit. Für die Ferne können die Augen bequem über die Nahgläser hinwegsehen. Auch als Punktal-Nahklemmer erhältlich. Lassen Sie sich beim Optiker Zeiss-Nahbrillen und -Nahklemmer vorlegen.

ZEISS
Punktal-Nahbrille

Jedes Glas trägt das Schutzzeichen Ⓩ. Zeiss-Punktal-Niederlagen überall bei den durch dieses Zeichen kenntlich gemachten optischen Fachgeschäften.

Druckschrift „Opnah 156" und jede Auskunft kostenfrei von

CARL ZEISS / JENA

A. W. FABER
"CASTELL"

◇ RECHEN-STÄBE ◇

Neben dem normalen technischen Rechenstabe werden folgende Spezialrechenstäbe für Mathematiker, Physiker, Ingenieure hergestellt:

375 (System Rietz) mit kubischer Teilung: liefert a^3, $\sqrt[3]{a}$, $a^{2/3}$, $a^{3/2}$ mit einer Läuferstellung.

376 mit kubischer und reziproker Teilung: liefert außerdem $a \cdot b \cdot c$ und $a:(b \cdot c)$ mit einer Schieberstellung, ferner zahllose höhere Potenzen und Wurzeln.

378 mit neuer log-log-Teilung: liefert alle Potenzen und Wurzeln von e, die natürlichen Logarithmen mit einer Läuferstellung, alle Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten mit einer Schieberstellung, desgleichen Spannungsabfall, Leitungswiderstand, Leitungsgewicht, Wirkungsgrade mit einer Schieberstellung.

Logarithmische Maßstäbe in allen Teilungslängen für das Auftragen von Koordinaten bei Nomogrammen, Fluchtlinientafeln u. ä. als praktisches zeitsparendes Hilfsmittel.

A. W. FABER gegr. 1761 * "CASTELL" Bleistiftfabrik
Stein bei Nürnberg / Rechenstabfabrik in Geroldsgrün (Obfrk.)

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

VOLS I-XIX

1921-39

VOL. 6

UNIVERSITY MICROFILMS